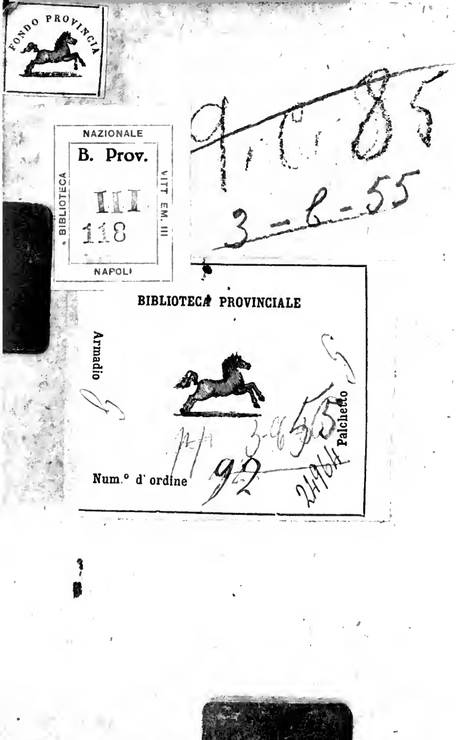



FONDO PROVINCIA
NAZIONALE
B. Prov.
III
118
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.



Ouvrages du même auteur, chez le même libraire.

1° Nouvelles démonstrations de la formule du binome de Newton. 1854

2° Quelques questions de Géométrie et d'analyse algébrique. 1855

3° Cours de Topographie (*épuisé*). 1856

4° Coup d'œil sur l'Enseignement des mathématiques dans les Etablissements d'instruction moyenne. 1858

5° Cours de Géométrie descriptive (*épuisé*). . . 1860

6° Dissertation sur les vrais principes des calculs transcendants, examen critique des diverses conceptions proposées jusqu'à ce jour. . . . 1860

Sous presse:

Cours de Topographie, 2de édition.

Pour paraître prochainement :

Cours d'Algèbre.
Cours de Géométrie descriptive, 2de édition.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,

PAR

A. J. N. PAQUE,

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIEGE,
ÉLÈVE-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE TOULOUSE, ET DE L'ACADÉMIE STANISLAS DE NANCY.

TOME PREMIER.

ARITHMÉTIQUE.





LIÉGE,
H. DESSAIN, ÉDITEUR,
RUE TRAPPÉ.

PARIS,
MALLET-BACHELIER,
LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

BRUXELLES,
A. DECQ, LIBRAIRE,
RUE DE LA MADELEINE.

Juin 1861.

Déposé en Belgique et en France.

Les formalités voulues par la loi ont été remplies.

—

Chaque exemplaire est revêtu de la signature de l'auteur.



Depuis dix ans une loi régit en Belgique l'enseignement moyen : des hommes, dévoués à la jeunesse et au progrès des études, ont doté diverses parties de la section littéraire d'ouvrages qui ne sont nullement inférieurs à ceux qu'on a publiés en France sur les mêmes matières. Aussi le Conseil de perfectionnement s'est-il empressé d'autoriser, dans les établissements de l'Etat, l'emploi de ces ouvrages nationaux.

Nous venons, quant à la partie mathématique, payer notre tribut d'efforts à l'œuvre commune, et chercher ainsi à offrir à l'Enseignement, *des traités conformes aux programmes officiels*, et conçus et exécutés dans un esprit de *rigueur et de progrès scientifique*.

La tâche est difficile et laborieuse, mais nous l'abordons avec courage, en nous appuyant sur quelques études sérieuses, sur notre expérience de l'Enseignement et sur l'espoir d'être soutenu dans un si long travail par tous ceux qui ont à cœur l'intérêt de la jeunesse

Notre publication se composera de sept parties et portera sur l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, la géométrie analytique, la géométrie descriptive et la topographie.

L'arithmétique sera terminée en février 1861, et la topographie (2de édition) en avril 1861; l'algèbre et la géométrie descriptive (2de édition) paraîtront en mai 1861; la trigonométrie en juillet 1861 ; enfin la géométrie et la géométrie analytique seront livrées au public en 1862.

Améliorer et *simplifier*, sans rien ôter de la rigueur la plus absolue, prendre la *continuité* pour principe dominant dans la génération et l'étude des grandeurs, placer au début de la science d'une manière simple et *accessible*, les principes sur lesquels repose l'édifice entier, et régir ainsi le vaste ensemble mathématique par une seule et même conception, tel est le caractère principal de la publication actuelle.

Trop faible en présence d'une entreprise si grande et si difficile, nous comptons sur l'indulgence de tous les hommes voués à l'Enseignement; nous comptons aussi sur la critique circonspecte, raisonnée et modérée.

Le dévouement à la jeunesse est notre seul mobile; qu'il soit aussi celui de ceux qui daigneraient critiquer des opinions qu'ils ne partageraient pas.

ARITHMÉTIQUE.

—

PRÉFACE.

—

Ce traité d'arithmétique est destiné à tous les élèves en général, et renferme aussi tout ce qui est nécessaire aux jeunes gens qui étudient cette science avec l'intention d'aborder ensuite les autres branches des mathématiques. On trouvera dans les définitions et dans les raisonnements une précision et une rigueur, dont il importe à la jeunesse de prendre l'habitude au début même de la science : cette rigueur, nous avons voulu l'introduire jusque dans les préliminaires mêmes, et l'on s'apercevra que la clarté et la concision y ont gagné en même temps.

La numération a été l'objet d'une attention particulière, parce que les diverses opérations arithmétiques s'en déduisent avec beaucoup plus de facilité; son exposition, *qui sera sans doute remarquée*, a été divisée en deux parties, la nomenclature et la notation numériques : il y a là en effet deux choses distinctes et successives dans l'ordre des idées, comme elles l'ont été dans l'ordre historique. On ne remarque pas non plus que dans un nombre une unité d'ordre quelconque est plus grande que la somme de toutes celles qui la précèdent, même dans un système quelconque de numération; et cependant cette propriété, si importante, est le fondement de la division et de l'extraction des racines.

La plupart des auteurs distinguent les nombres en *abstraits* et *concrets*; cette distinction, complètement inutile, est inacceptable en présence de la définition du nombre comme résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité. Comment en effet, le rapport de deux grandeurs de même espèce pourrait-il être *concret* ?

La théorie des opérations fondamentales a subi des simplifications profondes ; celles de la multiplication, de la division, sont présentées sous une face nouvelle, et croyons-nous, très-avantageuse ; de plus, l'ordre d'exposition de ces opérations a été modifié pour rétablir l'ordre logique des idées.

Le calcul des fractions décimales fixera sans doute aussi l'attention par l'exposition rigoureuse et concise qui en est faite.

Nous avons supprimé *entièrement les trop fameuses théorie et terminologie proportionnelle :* si c'est une innovation didactique, prêchée déjà en 1816 par Gergonne, nous devons dire que depuis longtemps de bons esprits avaient reconnu les vices et surtout l'inutilité absolue de cette théorie; l'algorithme fractionnaire remplace naturellement et avec beaucoup d'avantages celui des proportions.

Parfois nous avons fait usage de lettres dans nos démonstrations, sans pouvoir cependant encourir le reproche de *faire de l'algèbre en arithmétique*; c'est une erreur qui commence aujourd'hui à se dissiper que *toute démonstration qui emploie des lettres est du domaine algébrique :* c'est l'esprit des calculs, et non leur forme, qui accuse la science dont ils relèvent, et l'emploi de notations plus commodes que celle des chiffres, *ne modifie en rien le caractère ou le système démonstratif.* En un mot, ce n'est pas un ensemble de signes et de notations qui constitue une science, mais bien la coordination des idées, la liaison logique des conséquences des diverses spéculations intellectuelles.

Nous reconnaissons qu'on a souvent abusé des symboles littéraux en arithmétique, mais nous ne pensons pas qu'on doive les écarter systématiquement : il nous paraît qu'en restant *clair et concis*, et laissant au fond de la théorie son caractère distinctif, il faut sans scrupules recourir à la forme didactique la mieux appropriée à ce double but. Il est seulement indispensable que dans les théories,

applications ou problèmes où le secours des lettres pourra être d'un avantage incontestable, le caractère de la démonstration soit *arithmétique* et non pas celui d'une traduction de la mise en équation d'une question quelconque : Nous nous sommes strictement conformés à cette condition que nous déclarons *fondamentale*.

Tout le *calcul* des nombres complexes a été relégué à la fin de l'ouvrage, comme espèce de hors d'œuvre exigé par les programmes : nous croyons que dans un traité destiné aux classes, il n'est pas convenable de donner les mesures anciennes.

Nous avons saisi avec empressement l'occasion de parler des nombres incommensurables ou irrationnels, et d'ouvrir l'esprit aux idées générales de variation des grandeurs.

Quelques questions choisies terminent les divers livres dont se compose ce traité, mais s'adressent bien plus à l'intelligence dont elles cherchent à provoquer le développement, qu'à la simple habileté de chiffrer, qualité qui *doit* avoir été acquise par l'enseignement primaire.

Encore un mot.

Si nous n'avions dû suivre les programmes officiels, l'arithmétique et l'algèbre eussent été traitées simultanément et de manière à ne former qu'une seule et même science, dont l'exposition bien plus générale et plus condensée eut, à chaque pas, fait saisir la correspondance de ces deux parties. Nous n'avons pas cru devoir rompre ainsi avec l'époque, et comme transaction, le parallélisme des démonstrations arithmétiques et algébriques a été maintenu, aussi souvent que l'ont permis les errements actuels de l'enseignement.

INTRODUCTION.

—

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

—

1. On appelle *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution.

On confond souvent les mots *grandeur* et *quantité*, et cependant il y a entre ces expressions cette différence que le mot grandeur implique l'idée de comparaison appliquée à la quantité ; toutefois on est porté à considérer les mots *grandeur*, *quantité* comme synonymes, attendu que c'est toujours moins la quantité que sa grandeur ou valeur, qu'il importe de connaître.

2. On entend par *mathématique* la science qui s'occupe de l'étude des propriétés et de la comparaison des quantités, sous le point de vue de leur mesure, effectuée directement ou indirectement.

Ces derniers mots demandent une explication : la mesure de deux droites l'une par l'autre est incontestablement le cas le plus simple de comparaison, et cependant elle ne peut presque jamais être effectuée directement ; à plus forte raison en général, la mesure *directe* des quantités est sinon impossible du moins très-difficile ; on a donc été forcé, dans la plupart des cas, de renoncer à la voie *directe*, et de chercher des méthodes de détermination indirecte des grandeurs.

C'est à cette nécessité que sont dues les mathématiques, dont l'arithmétique est l'une des parties.

3. A la notion de grandeur se rattache immédiatement, venons nous de dire, celle de *mesure* ou *de comparaison;* c'est qu'en effet il est impossible de se faire une idée d'une quantité qu'en la rapportant, qu'en la comparant à certaine autre qui est ainsi le terme de comparaison dans la nature, dans l'espèce de la quantité proposée; et alors on est conduit, pour opérer d'une manière uniforme et régulière, à se servir de la même grandeur pour y rapporter toutes les autres de même espèce.

Quand on dit :

Cette corde a VINGT *mètres*, on entend que l'on a porté vingt fois l'un à la suite de l'autre, le mètre, et que la longueur de la corde s'est trouvé parcourue sans reste, en vertu de cette opération.

4. Cette grandeur, qui dans chaque espèce sert à l'évaluation des quantités, donne lieu à certaines remarques.

1° Le terme de comparaison est *arbitraire*, quant à sa grandeur, puisque rien ne peut en fixer la valeur d'une manière absolue.

2° Il doit être de même espèce que les grandeurs à comparer.

3° Il doit être constant dans toute l'étendue de la comparaison.

Ce terme de comparaison est appelé *unité*. On classe ordinairement les diverses espèces de quantités de façon que leurs unités, bien qu'arbitraire chacune, peuvent néanmoins, en vue du désir et de la nécessité de simplifier les comparaisons, être liées par une loi qui n'enlève rien de leur généralité individuelle. Alors une seule unité est pour ainsi dire, à choisir, et ce choix peut être guidé par certains motifs, tels par exemple et entr'autres, que *celui d'être donné par la nature elle-même.*

Nous nous bornons actuellement à ces quelques mots, pour faire comprendre le sens de la définition suivante, sur laquelle nous reviendrons plus tard.

On appelle UNITÉ *une grandeur d'une espèce quelconque prise arbitrairement, ou dans la nature, pour servir de terme de comparaison à toutes les grandeurs de même espèce.*

5. Toute comparaison étant évidemment une opération, donne lieu à un *résultat* qui prend le nom de rapport, si les quantités ou termes de la comparaison sont *quelconques;* et, celui de *nombre* si le terme auquel on compare l'autre est l'*unité.*

Ainsi donc :

Le RAPPORT *est le résultat de la comparaison de deux grandeurs quelconques; et le* NOMBRE *est celui de la comparaison d'une grandeur quelconque à son* UNITÉ.

On pourrait aussi dire avec concision *le nombre est le rapport d'une grandeur à son unité.*

6. Ce résultat, quant à la composition de la quantité, peut donner lieu à ces cas particuliers :

1° Ou bien la quantité est une collection ou réunion d'unités, et alors le *nombre est entier.* Donc, *un nombre entier est le résultat de l'évaluation d'une collection quelconque d'unités de même espèce.*

2° Ou bien *la quantité n'est pas entière.*

Alors selon qu'elle est plus petite ou plus grande que l'unité, le nombre correspondant est une *fraction* ou un *nombre fractionnaire.*

Ainsi l'on entend par *fraction le résultat de la mesure d'une quantité plus petite que l'unité;* et par *nombre fractionnaire, celui de l'évaluation d'une quantité plus grande que l'unité.*

Collectivement la *fraction* et le *nombre fractionnaire* portent le nom *d'expressions fractionnaires.*

7. Le nombre, en tant qu'il désigne le résultat de la comparaison, sans avoir égard à l'espèce ou à la nature dans laquelle se fait cette comparaison, est *par quelques auteurs*, désigné sous le nom de *nombre* ABSTRAIT; il s'énonce alors, abstraction faite de toute espèce d'unité.

Le nombre abstrait est le *nombre pris dans* toute sa généralité : mais dès que le nombre doit servir à définir la valeur d'une quantité, il faut le qualifier du nom de l'unité correspondante; selon ces mêmes auteurs il reçoit alors le nom de *nombre concret*. Ainsi douze sera un nombre abstrait, et douze mètres, un nombre concret.

En toute rigueur le *nombre concret* n'est pas un nombre, mais bien une grandeur. Le nombre n'existe que dans les conceptions, il n'a pas la qualité réelle de ce qui est. Aussi, ne craignons-nous pas de le dire, c'est se placer à un point de vue bien faux, que d'admettre la distinction de nombres abstraits et concrets; nous repoussons donc cette distinction comme irrationnelle et impossible, et n'en avons parlé ici, après en avoir dit un mot dans la préface, que pour en signaler le danger et la fausseté.

8. Combiner les quantités représentées par des nombres, (résultats de leur évaluation), tel est le problème général qui a donné naissance à l'arithmétique.

Nous verrons par la suite que toute opération numérique revient à la composition ou à la décomposition des nombres, à l'aide de certains autres considérés comme éléments des premiers, et l'on peut dire :

L'arithmétique étudie les nombres dans leurs combinaisons; elle en fait ressortir les diverses propriétés, apprend à les composer et à les décomposer.

—

LIVRE PREMIER.

DE LA NUMÉRATION.

CHAPITRE I.

Numération des nombres entiers. — Unités numératives, nombres élémentaires; groupes. — Nomenclature et écriture des unités numératives, des nombres élémentaires et des nombres entiers quelconques. — Exceptions aux règles établies. Remarque générale. — Théorème : Toute unité numérative est plus grande que la somme de toutes celles qui sont d'ordre inférieur au sien.

9. Soit par accroissement, soit par diminution, rien ne limite les grandeurs; la suite des nombres est donc illimitée tant dans un sens que dans l'autre.

Dès lors, on a cherché à créer un système d'énonciation des nombres, à établir les lois diverses de la combinaison des éléments de ce système, et bientôt la complication et la difficulté des questions à traiter, ont mis en évidence l'indispensable nécessité de la création d'un système représentatif, ou d'*écriture numérique.* Pour rendre complète la connexion de la nomenclature et de l'écriture des nombres, il fallait que les éléments de chacun de ces systèmes fussent :

1° *aussi simples et aussi peu nombreux que possible.*

2° *liés par les mêmes lois de compositions.*

10. L'ensemble de ces systèmes permettant le passage immédiat de l'un à l'autre, porte le nom de *numération ;* il pourrait se définir, l'*art d'énoncer et d'écrire les nombres*, et se divise en deux parties :

La *numération parlée qui établit les* CONVENTIONS *à l'aide desquelles il est possible d'énoncer les nombres* ; et la *numération écrite* qui, en se substituant avec tant d'avantages à la première, *rapproche suffisamment les nombres pour que l'esprit puisse en saisir rapidement les diverses propriétés :* puisque calculer c'est composer et décomposer les nombres, et qu'il est évident que ces compositions et décompositions ne peuvent qu'être favorisées par le rapprochement des éléments, tout doit tendre au rapprochement le plus grand, le plus intime des nombres.

La numération écrite a pour but d'établir les conventions par lesquelles il est possible de représenter tous les nombres à l'aide d'un nombre limité de caractères ou signes abréviatifs.

En entrant dans les détails d'exposition de ces deux espèces de numérations, nous nous convaincrons qu'elles satisfont aux conditions générales indiquées au numéro précédent.

11. La suite des grandeurs entières a l'unité pour point de départ : en procédant à la formation de cette suite par accroissement successif de l'*unité*, on obtiendra les différents nombres de l'échelle ascendante entière numérique.

Avant tout, disons que *le rapport de l'*UNITÉ A ELLE-MÊME, a été désigné par le mot *un*.

Un est donc un véritable nombre, dont l'*unité* est la grandeur correspondante ; cependant lorsqu'il s'agit de calcul on se sert souvent du mot *unité* dans le sens de *un*.

On conçoit que, dans le but de simplifier l'énonciation des nombres, il est indispensable d'admettre certains groupements de l'unité, de reconnaître ces groupes comme parties constituantes, enfin, d'en faire de véritables unités (*abstraites*), auxquelles nous donnerons le nom d'*unités numératives*, pour rappeler les motifs de leur établissement et les distinguer de l'unité qui sert à la mesure des grandeurs.

12. Occupons-nous d'abord de la numération de ces nouvelles unités.

Quelles que soient ces unités, il est nécessaire que le passage de l'une à l'autre immédiatement supérieure, soit *constant*, c'est-à-dire le même pour deux quelconques de ces unités consécutives : en effet, s'il en était autrement l'énonciation et la représentation numériques seraient impossibles au moyen d'un nombre *limité* de mots et de signes.

Pour un motif semblable les mêmes signes, combinés d'une manière convenable, devront servir à la représentation des unités numératives.

Le nombre qui indique combien il faut d'unités numératives d'un ordre *quelconque* pour faire une unité numérative de l'ordre immédiatement supérieur, est appelé *base* du système.

Dans tout système de numération on entend par *nombres élémentaires* ceux inférieurs à la base.

Le système où la base est *dix*, et par suite dans lequel les unités numératives deviennent de *dix en dix fois plus grandes* porte le nom de *système décimal de numération* : actuellement nous ne traiterons que de ce système, en renvoyant à un autre livre l'*étude des systèmes de numération à base quelconque*.

13. Conformément à ce qui vient d'être dit, on a admis que :

1° *Les signes* 1 (UN), *et* 0 (ZÉRO) *sont destinés par une combinaison convenable à la représentation des unités numératives.*

2° *Tout zéro placé à la droite d'une unité numérative quelconque le fait passer à l'ordre immédiatement supérieur.*

Les unités, qui nous occupent, sont donc représentées par 1, 10, 100, 1000, 10000,.....

Et l'on voit que :

En augmentant de 1 le nombre de zéros qui se trouvent à la droite du signe 1, on obtient le rang ou l'ordre de l'unité numérative.

14. Pour simplifier le plus possible la nomenclature numérique, on est convenu de partager les unités numératives en *groupes*, renfermant chacun trois ordres consécutifs représentés par

1, 10, 100.

Ces trois unités sont appelées collectivement *unités élémentaires*, et spécialement

unité, *dizaine*, *centaine*.

Les groupes se classent par premier, deuxième, troisième, etc., et portent les noms suivants :

Groupe des	unités, ayant pour unité et pour signe.				1
	mille,	»	»	»	1000
	millions,	»	»	»	1000000
	billions,	»	»	»	1000000000
	trillions	»	»	»	1000000000000
		»	»	»	
		»	»	»	

Remarquons en passant que le nombre de *zéros* entrant dans la représentation de chaque groupe est égal à *l'ensemble de trois zéros, écrit une fois de moins* que ne l'indique l'ordre du groupe.

La succession continue des unités numératives se classe donc comme suit :

Unités	unité, qui se représente par			1
	dizaine	»	»	10
	centaine	»	»	100
mille	unité	»	»	1000
	dizaine	»	»	10000
	centaine	»	»	100000
millions	unité	»	»	1000000
	dizaine	»	»	10000000
	centaine	»	»	100000000

En examinant attentivement les signes des unité, dizaine, centaine de chaque groupe, nous formulons la remarque importante :

La représentation d'une unité élémentaire d'un groupe quelconque possède autant de zéros qu'en contiennent les signes de son groupe et de son unité élémentaire.

D'où :

Les unités élémentaires de même nom de deux groupes donnés, ne diffèrent dans leurs figures que d'un nombre de tranches de trois zéros égal à la différence des rangs de ces groupes.

Nous résoudrons actuellement avec grande facilité les deux problèmes suivants :

15. 1er Problème.

La figure d'une unité numérative quelconque étant donnée, en trouver l'énonciation.

Soit à énoncer 10000000.

Cette unité appartient à un groupe dont l'ordre est, d'après ce qui vient d'être dit (14), *supérieur de* UN au nombre de tranches de trois zéros de la figure proposée; lorsque la détermination de cet ordre est acquise, on énonce l'unité élémentaire (1; 10 ou 100), restant à gauche, et on la qualifie du nom du groupe.

On a donc en règle :

Pour énoncer une unité numérative donnée, partagez-la de droite à gauche en tranches de trois zéros, énoncez, comme isolée, l'unité élémentaire dont le signe est à gauche de la dernière tranche ainsi obtenue, qualifiez-la immédiatement du nom du groupe auquel elle appartient.

L'unité 10000000 s'énoncera *dizaine de millions.*

16. 2e PROBLÈME.

Ecrire une unité numérative énoncée.

Soit à figurer une centaine de millions.

L'unité élémentaire d'un groupe donné a (14) vers la droite de sa représentation *individuelle*, autant *moins une*, de tranches de trois zéros, que l'indique le rang de ce groupe

Or, l'unité élémentaire est la centaine, dont le signe est

100,

Et puisque le groupe des millions est le troisième, il suffira de placer à la droite de ce premier résultat deux tranches de trois zéros; on aura

100,000,000

D'où l'on déduit :

Pour écrire une unité numérative énoncée, écrivez-en

l'unité élémentaire, et placez à la droite de la figure ainsi obtenue, autant moins UNE, *de tranches de trois zéros, que l'indique le rang du groupe.*

17. Les *nombres élémentaires* entrant dans la composition des nombres, prennent le nom de *caractéristiques.*

Par extension à la définition (12) de ces nombres, le nom de *nombre élémentaire* s'applique aux collections des mêmes unités numératives, en nombre inférieur à la base du système.

La numération des nombres élémentaires se déduit immédiatement de ce qui précède : disons d'abord que dans le système décimal les *caractéristiques* sont :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,

et qu'elles ont pour figures respectives :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Or, de même que l'on est convenu de faire suivre le signe 1 d'un nombre convenable de zéros, destinés à caractériser le rang d'une unité numérative donnée, de même pour représenter un nombre élémentaire d'unités numératives de ce rang, il a été naturel de *convenir d'écrire le même nombre de zéros à la suite de la caractéristique considérée.*

Ainsi, voulant écrire *cinq billions,* et observant que le billion a pour figure :

1,000,000,000,

il viendra

5,000,000,000.

Etablissons donc en règle :

Pour énoncer ou pour représenter un nombre élémentaire quelconque, énoncez ou figurez-en la caractéristique, faites suivre ce premier résultat du nom ou de la figure de l'unité numérative du nombre donné.

18. Toutefois, une observation importante doit être faite :

Lorsque les caractéristiques 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, expriment des dizaines d'un groupe quelconque, on adopte les noms suivants :

20	vingt
30	trente
40	quarante
50	cinquante.
60	soixante.
70	soixante-dix
80	quatre-vingt.
90	quatre-vingt-dix.

19. Abordons actuellement la *numération des nombres quelconques*, qui sont des réunions de nombres élémentaires d'unités numératives différentes.

Un pareil nombre serait, par exemple, celui qui contiendrait les éléments numératifs suivants :

(1)	5,000,000,000	cinq billions.
	700,000,000	sept cents millions.
	600,000	six cents mille.
	3,000	trois mille.
	6	six.

Cette forme si complexe d'un nombre en a fait désirer une plus simple que l'on a obtenue par l'introduction de cette convention :

Ecrivez en un seul ensemble numérique les différentes caractéristiques du nombre donné, au rang appartenant à chacune d'elles.

Le nombre proposé devient dès lors :

5,700,603,006. (2)

S'agit-il d'énoncer le nombre (2), nous énoncerons

son équivalent (1), en commençant la phrase numérique par le nombre élémentaire d'ordre le plus élevé, et faisant suivre des nombres élémentaires immédiatement inférieurs.

Le nombre (2) fournira donc cet énoncé :

Cinq billions sept cent millions six cent trois mille six.

Or si dans l'expression (2) que nous pouvons appeler la forme *condensée* de (1), nous voulons trouver les éléments de cette énonciation, il faudra déterminer le groupe auquel appartient chaque caractéristique, ainsi que son unité élémentaire; c'est ce qui se fera aisément si l'on effectue le partage de la forme (2) en tranches de *trois rangs*, comme si pour chaque caractéristique considérée, celles de rangs inférieurs étaient des zéros ; cette opération mentale si simple fournit immédiatement le groupe de chaque caractéristique, et son unité élémentaire.

D'où résulte cette règle :

Un nombre écrit étant donné, pour l'énoncer établissez-en les groupes dont, en allant de gauche à droite et pour chacun desquels successivement, vous énoncerez les nombres élémentaires qualifiés dans leur ensemble par les noms de leurs groupes respectifs.

Soit encore à énoncer le nombre :

5,638,643,465.

Le partage en groupes donne :

5	groupe	de	billions.
638	»	»	millions.
643	»	»	mille.
465	»	»	unités.

Enonçant, *dans leur ensemble*, les nombres élémentaires

de chaque groupe, avec qualification immédiate du nom du groupe, nous aurons :

Cinq billions six cent trente huit millions six cent quarante trois mille quatre cent soixante-cinq.

20. *Observation.* Dans l'intervalle de 1 à 2 dizaines, les nombres

11, 12, 13, 14, 15, 16

qui devraient s'énoncer :

dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six,
prennent les noms de :

onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.

21. De tout ce qui précède on conclut aisément cette règle :

On figure un nombre dont l'énonciation est donnée, en écrivant l'ensemble des nombres élémentaires de chaque groupe, en commençant par celui du rang le plus élevé, avec cette précaution en allant de gauche à droite d'indiquer par des zéros, ou par des tranches de trois zéros, les unités numératives ou les groupes qui pourraient manquer.

Ainsi la phrase numérique :

six billions sept cent deux mille huit

fournit la figure :

6,000,702,008.

22. *Remarque générale.*

La loi de génération des unités numératives, et la numération des nombres élémentaires quelconques montrent clairement que toute unité numérative valant 10 unités numératives de rang immédiatement inférieur,

Tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités décuples de celles de cet autre.

Remarquons bien aussi que tout chiffre a nécessairement deux valeurs : l'une *propre*, *absolue*, et tenant à sa forme; l'autre *relative* et qui est celle qu'il acquiert en jouant le rôle de caractéristique.

La valeur absolue d'un chiffre est donc essentiellement constante ; la valeur relative est variable et dépend de la place ou du rang que ce chiffre occupe dans la figure du nombre.

Quant au zéro, il est clair que par lui-même il n'a aucune valeur, et que ce caractère sert uniquement à tenir lieu et place d'unités numératives n'entrant pas dans la composition des nombres.

23. L'égalité de deux nombres se note en écrivant ces nombres sur une même ligne, mais en les séparant du signe $=$. Ainsi $8 = 8$ s'énonce huit *égal* huit.

Pour indiquer l'inégalité de deux quantités on se sert du signe

$$>$$

en ayant soin de placer le plus grand des deux nombres dans l'angle qui forme le signe; ainsi pour exprimer que 9 *est plus grand que* 5, on écrira :

$$9 > 5$$

ou bien encore :

$$5 < 9$$

Mais de cette seconde forme, renversée par rapport à la première, l'énonciation se fait en sens contraire aussi et donne lieu à :

5 *plus petit que* 9.

Ce qui se trouve à gauche du signe d'égalité ou d'inégalité porte le nom de *premier membre* de l'expression, et ce qui est à droite, celui de *second membre;* d'ailleurs ces qualifications de *premier* et de *second* étant arbitraires, peuvent se

permuter, c'est-à-dire, que dans toute égalité ou dans toute inégalité les membres peuvent alterner.

24. THÉORÈME. *Toute unité numérative est plus grande que la somme de toutes celles qui sont d'ordre inférieur au sien.*

Démonstration. On a :

$$10 > 1$$

A plus forte raison :

$$9 \text{ dizaines} > 1$$

D'où encore en augmentant également de 1 dizaine, chacun des membres de cette relation, et employant le signe (+) placé entre les quantités à ajouter,

$$10 \text{ dizaines} > 10 + 1$$

ou bien

$$100 > 10 + 1 \qquad (1)$$

De cette dernière inégalité on déduit *a fortiori*

$$9 \text{ centaines} > 10 + 1$$

D'où, en ajoutant cent aux deux membres,

$$10 \text{ centaines} > 100 + 10 + 1$$

ou

$$1000 > 100 + 10 + 1 \qquad (2)$$

on aurait encore :

$$9 \text{ mille} > 100 + 10 + 1$$

et

$$10 \text{ mille} > 1000 + 100 + 10 + 1$$

ou

$$10000 > 1000 + 100 + 10 + 1 \qquad (3)$$

En continuant à raisonner de la sorte, on verrait que les relations (1), (2), (3), démontrent la proposition.

—

CHAPITRE II.

—

Comparaison des fractions. — Dénominateur, numérateur. — Unité fractionnaire. — Fractions semblables, dissemblables. – Numération des fractions ordinaires. — Fractions décimales, transformation des fractions décimales en fractions ordinaires et réciproquement, lorsque le dénominateur est une unité numérative.

—

25. Pour évaluer une fraction, c'est-à-dire une quantité plus petite que son unité, on peut concevoir le recours à la superposition de cette fraction sur l'unité. Deux cas sont à distinguer :

1° ou bien la fraction *épuisera* (sans reste) *son unité*.

2° on bien, et c'est on le comprend, le cas général, l'unité ne sera pas *épuisée* par la superposition *successive* de la fraction, et il restera sans évaluation *immédiate* une certaine portion de l'unité, plus petite encore que la fraction étudiée. Il faudrait dès lors, une ou plusieurs opérations analogues à la superposition ainsi faite, pour estimer ce que l'opération primitive aurait laissé sans appréciation.

On a donc dû recourir à un autre procédé de comparaison. Après avoir divisé l'nnité en un nombre entier *quelconque* de parties *égales*, on porte l'une de ces parties sur la fraction à évaluer, et s'il arrive que cette nouvelle superposition *épuise la fraction* nous aurons une idée précise de la valeur de cette grandeur en réunissant dans notre esprit, les nombres

qui indiquent combien de parties employées composent l'unité et la fraction.

Par exemple, si la partie superposée est contenue 17 fois dans l'unité et 5 fois dans la fraction, les nombres 17 et 5 en déduction de leur origine, fourniront une représentation pour ainsi dire *graphique* de la fraction.

En résumé, l'unité a été divisée en un certain nombre de parties *égales*, dont une réunion plus ou moins grande a formé la fraction.

On appelle *dénominateur* le nombre qui indique en combien de parties égales l'unité a été divisée, et *numérateur* celui qui marque combien il faut de ces parties pour constituer la fraction.

26. Dans l'évaluation que nous venons d'exposer, on remarque que la fraction auxiliaire, qui sert à la superposition joue le rôle d'une véritable unité transitoire; à ce point de vue le dénominateur exprime combien il faut de ces unités, *variant avec chaque fraction*, pour former l'unité entière primitive.

On pourrait donner à cette unité variable le nom d'*unité fractionnaire* et en l'introduisant explicitement dans les démonstrations, nous verrons que l'on raccorde immédiatement les principes du calcul fractionnaire à ceux du calcul des nombres entiers.

Une fraction devient ainsi un nombre entier (numérateur) d'unités fractionnaires.

Dans une expression fractionnaire on distingue donc deux nombres, numérateur et dénominateur; et ces deux nombres portent collectivement le nom de *termes* de la fraction.

Lorsque des nombres fractionnaires ont même dénominateur, on dit qu'ils sont *semblables*; ils sont *dissemblables* dans le cas contraire.

27. *Numération des fractions ordinaires.*

On adopte cette nouvelle convention :

Pour énoncer une unité fractionnaire, terminez par la particule ième *le nom du dénominateur.*

D'après cela, il sera facile d'énoncer une fraction quelconque qui est une collection entière, marquée par le numérateur, d'unités fractionnaires dont la valeur est indiquée par le dénominateur : puisque jusqu'ici la qualification de l'unité numérative a toujours suivi, dans les phrases numériques, l'énoncé du nombre, il faudra,

Pour énoncer une expression fractionnaire, faire suivre l'énoncé du numérateur de celui de l'unité fractionnaire.

Ainsi 8 et 11 étant respectivement le numérateur et le dénominateur d'une fraction, on aura pour énoncé :

huit onzièmes.

28. Autre convention.

Pour représenter une fraction dont l'énoncé est donné, on écrit le dénominateur verticalement au dessous du numérateur en plaçant entre ces nombres un petit trait horizontal.

C'est ainsi que la fraction *huit onzièmes* a pour figure :

$$\frac{8}{11}$$

29. *Des fractions décimales.*

Considérons le nombre :

123456789

Admettons que dans ce nombre 5 soit la caractéristique des unités simples, et demandons-nous ce qu'alors représentent les chiffres :

6, 7, 8, 9.

Puisque d'après les principes de la numération entière, tout chiffre placé à la droite d'un autre, représente des

unités 10 fois plus petites que celles de cet autre, il est clair que

$\frac{1}{10}$ sera l'unité du chiffre 6.
$\frac{1}{100}$ » » » » 7.
$\frac{1}{1000}$ » » » » 8.
$\frac{1}{10000}$ » » » » 9.

Pour réaliser ces unités, il faudra diviser l'unité entière en 10, 100, 1000, 10000 parties.

Il résulte de là que pour écrire un nombre contenant des fractions dont les dénominateurs sont 10, 100, 1000, ... ou en général dont les dénominateurs sont des unités numératives, il n'est pas indispensable d'écrire ces dénominateurs : il suffit de bien distinguer le chiffre des unités simples, et d'écrire les chiffres de dixième, de centième, de millième, etc. respectivement à la première, à la deuxième, à la troisième, etc. place à droite de la caractéristique des unités. C'est ce que suppose l'écriture,

$$1\ 2\ 3\ 4\ \overset{\text{unité}}{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Pour éviter l'embarras et la perte de temps provoqués par l'écriture du mot *unité* au-dessus du chiffre correspondant, on a imaginé de placer une *virgule* entre les caractéristiques *d'unités et de dixièmes.*

On a ainsi :

$$1\ 2\ 3\ 4\ \overset{\text{unité}}{5}\ 6\ 7\ 8\ 9 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5,\ 6\ 7\ 8\ 9.$$

Nous voilà donc en possession désormais d'une espèce de fraction dont l'écriture numérique participe de celle des nombres entiers. Cette espèce de fraction est remarquable parce que sa génération est identique à celle de la numération entière, qui est ainsi continuée en dessous de l'unité.

On donne le nom de *fractions décimales aux fractions dont le dénominateur est une unité numérative.*

30. Dans un nombre décimal, il y a en général, une partie entière et une fraction ; en parlant de la numération décimale nous ne nous occuperons que de la fraction.

Considérons en particulier les *unités numératives* moindres que 1 ; soit en conséquence l'unité,

0 , 0001

Et proposons-nous d'*en trouver l'*ÉNONCÉ.

Pour cela remarquons que dans *l'échelle complète des unités numératives supérieures et inférieures à* 1, les unités équidistantes de 1 ne diffèrent de noms que par la présence de la particule *ième*, qui est ajoutée au nom de l'unité entière pour former celui de l'unité fractionnaire correspondante.

Ainsi les noms des unités qui se trouvent les quatrièmes au-dessus et au-dessous de 1, sont :

dix-mille, *dix-mill*IÈME.

Or, dans la fraction :

0 , 0001

Le rang du chiffre 1 est le 4e, donc pour avoir le nom de son unité, il suffit de terminer par *ième* celui de l'unité numérative entière qui a le 5e ordre, ou bien qui est le 4e au-dessus de 1.

On obtient donc cette règle :

Pour énoncer une unité numérative fractionnaire, cherchez le nom de l'unité numérative entière dont le rang est supérieur de 1 à celui de l'unité fractionnaire proposée à droite de la virgule, et terminez le nom ainsi obtenu par la particule IÈME.

31. PROBLÈME. *Etant donnée l'énonciation :*

un millionième

En trouver la représentation numérique.

D'après ce que nous venons de dire, si l'on supprime la

syllabe *ième*, on aura le nom de l'unité entière équidistante de 1; on a ainsi le

million

qui est la 7e unité entière et par suite la 6e après l'unité principale.

Six est donc aussi le rang du *millionième*, dont le signe est par suite :

0 , 0,00001

32. Si l'on avait à énoncer *une* caractéristique d'ordre quelconque fractionnaire, si par exemple l'on donnait :

0 , 00007

on ferait suivre l'énoncé de la caractéristique 7 considérée comme entière, du nom de l'unité décimale fractionnaire dont le rang est celui du chiffre 7; c'est de cette manière que l'on a la phrase

sept cent-millièmes.

De même si de l'énoncé que nous obtenons, l'on voulait remonter à la figure numérique, il suffirait d'écrire 7 à droite de la virgule à la place qu'occupe le cent-millième.

33. Puisque dans tout nombre décimal

23,4567

les chiffres suivent les lois de la numération entière, il est clair que ce nombre renfermant 23 unités et 4567 unités fractionnaires du 4me ordre, aura pour énoncé :

vingt-trois entiers quatre mille cinq cent soixante sept dix millièmes.

ou encore

deux cent trente quatre mille cinq cent soixante sept dix-millièmes.

Inversement, *si l'on demandait de retourner de ce dernier*

énoncé décimal, à l'écriture du nombre, on écrirait d'abord le nombre entier :

234567

Puis on marquerait sur la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux que l'indique le nom *dix-millième* de l'unité numérative donnée.

34. De ce qui vient d'être dit (n° 33), il résulte évidemment que

$$23{,}4567 = \frac{234567}{10000}$$

Cette égalité donne lieu à ces deux règles importantes et dont on fait un fréquent usage en arithmétique :

1re RÈGLE. *Une fraction décimale est équivalente à une fraction ordinaire dont le numérateur est l'expression décimale, abstraction faite de la virgule, et dont le dénominateur est l'unité précédée d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux.*

2e RÈGLE. *Une fraction dont le dénominateur est l'unité précédée d'un certain nombre de zéros, est équivalente à la fraction décimale que l'on obtient en séparant, par une virgule sur la droite du numérateur autant de chiffres décimaux qu'il se trouve de zéros dans le dénominateur.*

A l'aide de ces règles, l'on pourra transformer les fractions décimales en fractions ordinaires, et réciproquement (lorsque le dénominateur est une unité numérative).

LIVRE DEUXIÈME.

—

LES QUATRE OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS.

—

CHAPITRE I.

Définitions des quatre opérations principales relatives aux nombres entiers, déduites des motifs auxquels ces opérations doivent leur existence. — Signes de l'arithmétique.

35. Les opérations que l'on a coutume d'appeler fondamentales sont au nombre de quatre :

Addition. *Multiplication*, *Soustraction* et *Division*.

Nous allons faire connaître l'essence de chaçune d'elles.

Calculer, c'est toujours *former* et *déformer*, *composer* et *décomposer* les nombres. La numération apprend à former les nombres par intervalles *égaux* entr'eux *et à l'unité*; l'addition procède à la construction de l'échelle numérique par intervalles *inégaux* et *quelconques*.

Au lieu cependant de construire les nombres par addition, *lorsqu'il s'agit d'intervalles égaux et quelconques*, on a recours à une autre opération, la *multiplication*. Nous dirons donc :

La multiplication est une opération construisant l'échelle numériqae par voie d'intervalles ÉGAUX QUELCONQUES.

36. Quant à la déformation, nous remarquons que si la

numération décompose les nombres, ce n'est que successivement et par intervalles égaux entr'eux et à l'unité : la soustraction est une opération plus expéditive, qui permet de trouver immédiatement comment s'exécute le passage d'un grand nombre à ùn petit nombre.

La soustraction est donc une opération qui décompose les nombres par intervalles inégaux et quelconques.

D'après le sens général, attaché à la multiplication (nº 35), il est clair qu'en partant du résultat et pour remonter aux éléments de cette opération, il suffirait d'effectuer une série de soustractions; ce moyen est impraticable par suite de sa longueur, et l'on recourt à une opération qui, parce qu'elle divise le résultat de la multiplication en ses éléments, porte le nom de *division*.

37. Dans le but de faciliter le rapprochement des nombres on a adopté certains signes qui servent à indiquer que telle ou telle opération doit être faite sur les quantités que ces signes *gouvernent*.

Le signe +, qui s'énonce *plus* ou *ajouté à*, *additionné à*, est celui de l'addition.

Le signe —, qui s'énonce *moins* ou *diminué de*, est le signe de la soustraction.

L'un ou l'autre des signes (×, ·) qui s'énoncent chacun *multiplié par*, caractérise la multiplication.

Le signe (:) qui s'énonce *divisé par*, appartient à la division ; on emploie plus souvent celui d'une barre horizontale.

38. Il y a certains cas où les notations ordinaires les plus en usage sont insuffisantes aux opérations du calcul. Lors qu'une question laisse à ses données une généralité qui ne permet plus l'emploi des chiffres, il devient nécessaire de recourir à d'autres signes qui n'ont par eux-mêmes au-

cune valeur ; on a imaginé à cet effet de se servir des diverses lettres de l'alphabet.

C'est ainsi que l'on introduit dans le calcul les lettres

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots\ x,\ y,\ z.$$

Souvent, pour désigner des grandeurs différentes, mais qui ont entr'elles une analogie qu'il importe de ne pas perdre de vue, on emploie une même lettre différemment accentuée (les accents étant placés un peu à droite et au-dessus des lettres).

Ainsi l'on écrira :

$$a',\ a'',\ a'''$$

que l'on énonce :

a prime, a seconde, a tierce.

Cette notation porte le nom de *notation par analogie.*

Faisons usage de ces signes généraux pour indiquer les opérations principales qui ont été signalées jusqu'à présent, et nous aurons :

$a + b$,	b ajouté à a.
$a - b$,	b soustrait de a.
$a \times b$ ou $a \cdot b$,	a multiplié par b.
$a : b = \frac{a}{b}$	a divisé par b.
$a = b$,	a égal à b.
$a < b$,	a plus petit que b.
$a > b$,	a plus grand que b.

—

CHAPITRE II

Théorie de l'addition des nombres entiers.

39. L'addition forme les nombres par intervalles *inégaux quelconques;* il en résulte que :

Cette opération a pour but, plusieurs nombres étant donnés, en former un autre qui contienne autant d'unités de chaque ordre qu'il y en a individuellement dans les nombres proposés.

Le résultat de cette opération porte le nom de *somme* ou *total*, et chacun des nombres donnés, celui d'*additif.*

Soit l'addition :

$$\begin{array}{r} 9862 \\ 743 \\ 5018 \end{array}$$

Chaque additif peut être considéré comme la somme de ses divers nombres élémentaires, et d'après la définition de l'opération, il suffira de réunir les nombres élémentaires de chaque ordre. Le total sera donc ici, en séparant par des virgules les sommes *partielles* obtenues pour chaque ordre d'unité :

$$\text{Total} = 9 + 5,8 + 7,6 + 4 + 1,8 + 3 + 2$$

Ces différentes sommes partielles, ou quelques-unes d'entr'elles pouvant dépasser 9, il y aura lieu alors de n'en écrire que les unités simples pour en reporter les dizaines

à la somme partielle, immédiatement voisine à gauche.

On a ainsi cette règle :

Pour additionner des nombres entiers écrivez les additifs les uns en dessous des autres de manière que les unités numératives de même espèce se trouvent en colonne verticale, et soulignez le dernier additif. En allant de droite à gauche faites la somme des chiffres dans chaque colonne, et écrivez sous la ligne dans cette colonne la somme partielle ainsi obtenue, si elle ne dépasse pas 9 ; mais si elle dépasse 9, n'écrivez de cette somme que les unités simples pour en reporter les dizaines à la colonne immédiatement voisine à gauche.

40. Cette règle prouve, par suite des éléments de chaque somme partielle que l'on aura à additionner :

1° deux nombres d'un seul chiffre, ou deux *caractéristiques.*

On aura alors la somme demandée en ajoutant successivement au premier additif, en vertu des principes et des lois de la numération, *chacune* des unités du second. Du reste cette opération si simple est du domaine de la mémoire et ne doit exiger aucun temps ni travail d'intelligence.

2° Un nombre entier quelconque, avec un nombre d'un seul chiffre.

Soit à ajouter 7 à 348,

On décomposera 348 en 34 dizaines et 8 unités ; ces 8 unités ajoutées aux 7 qui composent le second additif, donneront 15 unités ou bien 1 dizaine et 5 unités ; ce qui conduit au total :

355.

Enfin, pour faire l'addition de plusieurs nombres d'un seul chiffre, on ajoute d'abord deux de ces nombres, puis on ajoute le résultat avec le troisième, et ainsi de suite.

41. Dans une addition quelconque, après avoir observé le

dispositif en colonne verticale, il est indispensable de commencer les opérations par la droite; en effet, cet ordre permet d'effectuer en même temps les reports d'une colonne à la colonne suivante à gauche, ce que l'on ne pourrait faire en opérant de gauche à droite. Cependant il est indifférent d'opérer dans un sens ou dans l'autre lorsque les sommes partielles sont chacune inférieures à 10.

CHAPITRE III

Théorie de la multiplication des nombres entiers.— Définition du multiplicande, du multiplicateur; définition de l'opération. — Interversion des facteurs d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs. — Table de multiplication. —Trois cas de multiplication. — Nombre des chiffres d'un produit. — Méthode abrégée de multiplication. — Nécessité de commencer l'opération par la droite. Produit de plusieurs facteurs. — Puissance, base, degré.— Racine, indice.— Théorèmes. — Multiple, sa notation.

42. Cette opération de composition des nombres procède, avons-nous dit, par *intervalles égaux quelconques*, et fournit un résultat que l'addition ne formait qu'à l'aide d'une série plus ou moins longue de petites opérations ou additions successives.

Par exemple, supposons qu'il s'agisse d'additionner 5 nombres égaux à 8, on aurait :

8
8
8
8
8

Dont la *somme* est

5 fois 8 (1)

Remarquons que ce résultat (1), qui renferme explicitement le nombre 5, s'obtiendrait en opérant sur 8 comme on a dû le faire sur 1 pour avoir 5 : cette identité de composition, du

total 5 *fois* 8 avec 8, et du nombre 5 avec 1, est mise en évidence par le tableau :

1	est changé en	8
1		8
1		8
1		8
1		8
5		5 fois 8.

Actuellement nommons MULTIPLICANDE le nombre 8 *pris par addition*, et MULTIPLICATEUR le nombre 5 *qui indique combien de fois le multiplicande est considéré comme additif*.

Nous pourrons dès lors dire :

La multiplication est une opération qui a pour but, deux nombres étant donnés, l'un multiplicande, l'autre multiplicateur, en former un troisième appelé PRODUIT *qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité.*

43. Collectivement le multiplicande et le multiplicateur sont appelés *termes* ou *facteurs* du produit.

Désirant rapprocher ces termes, on est convenu de supprimer le mot *fois* placé entre les facteurs, de le remplacer par un point (·), de placer alors le multiplicande à gauche et le multiplicateur à droite du point; on a d'après cela,

$$5 \text{ fois } 8 = 8 \cdot 5$$

Cette dernière expression, selon qu'elle est lue dans un sens ou dans l'autre, donne lieu aux énonciations suivantes :

5 FOIS 8, en lisant *de droite à gauche*,
8 MULTIPLIÉ PAR 5, en lisant *de gauche à droite*.

44. De la définition de la multiplication résulte que *un produit est nul dès que l'un de ses facteurs est nul* : en effet, si c'est le multiplicande qui est nul, 0 pris par addition au-

4

tant de fois que l'on veut, donne toujours 0 pour somme; et si c'est le multiplicateur qui est nul, on doit en conclure que 0 ne contenant pas l'unité, le produit ne contiendra pas non plus le multiplicande, et sera par conséquent nul.

45. Théorème i. — *Le produit de deux nombres entiers ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Démonstration. Soient les facteurs 5 et 4; il faut prouver que 5 fois 4 est égal à 4 fois 5, c'est-à-dire que

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4.$$

Or, pour former 5 fois 4, il faut prendre 5 fois par addition chacune des unités de 4; par cette addition ces unités deviennent égales à 5, et le produit se compose par conséquent de 4 fois 5.

Si l'on veut déployer aux yeux cette démonstration, on aura :

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Multipliant de part et d'autre par 5, il vient :

$$4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5.$$

Le second membre étant la somme de *nombres égaux à* 5, revient à la multiplication dont le multiplicande est le nombre 5 pris par addition, et dont le multiplicateur est le nombre 4 qui marque combien on considère d'additifs égaux ; ce second membre prend donc la forme 5 · 4, ce qui donne :

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4.$$

46. *Autre démonstration.* Soit toujours le produit 4 · 5; disposant sur une ligne horizontale les unités du multiplicande, et écrivant autant de fois cette ligne qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, on forme le tableau

$$\begin{array}{c} 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Or, en comptant dans le sens horizontal et dans le sens vertical, les unités contenues dans ce tableau, on obtient les produits $4 \cdot 5$ et $5 \cdot 4$; par suite

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4.$$

47. **Théorème II.** *La valeur d'un produit d'un nombre quelconque de facteurs est indépendante de l'ordre de ses facteurs.*

Démonstration. Supposons un instant que cette propriété soit établie pour un nombre quelconque n de facteurs, de telle manière que P étant le produit, et a, b, c, ... k les facteurs, l'on ait :

$$P = a.\ b.\ c. \ldots\ldots k \qquad (n \text{ facteurs})$$

Démontrons que cette loi est encore vraie lorsque l'on introduit un nouveau facteur l, qui donne lieu au produit P', ou

$$P' = a.\ b.\ c. \ldots.. k.\ l. \qquad (n+1 \text{ facteurs})$$

Posons

$$k\,l = k'.$$

Il viendra :

$$P' = a.\ b.\ c. \ldots\ldots k'$$

Maintenant ce dernier produit, n'ayant plus que n facteurs, et étant soumis à l'interversion de ses termes, on pourra faire occuper à k' toutes les places possibles; par suite le facteur l de k' pourra, après tous ces changements, prendre toutes les places possibles, sauf la première. Mais remarquons qu'au lieu de considérer k' sous la forme $k\,l$, on pouvait (45) adopter celle $l.\ k$; alors l'interversion de n facteurs du produit P' amènerait l à la première place.

Le facteur l, *introduit dans* P, *peut donc indifféremment occuper* TOUTES LES PLACES; d'ailleurs comme avant cette introduction, l'on pouvait permuter de place les n facteurs de P, il est évident que les $n+1$ *facteurs de* P' *peuvent arbitrairement permuter leurs rangs.*

Or, lorsque le nombre n de facteurs est égal à 2, l'interversion a été démontrée ; donc cette interversion est vraie pour 3, facteurs, et ainsi de suite de proche en proche pour un nombre quelconque de facteurs. *c. q. f. d.*

48. *Table de multiplication.* Pour faire une multiplication il faut connaître les produits formés par deux nombres d'un seul chiffre : ces produits, construits *par addition*, se trouvent dans le tableau suivant à l'intersection des colonnes horizontales et verticales, en tête desquels les facteurs sont écrits :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Les produits consignés dans cette *table à double entrée*, longtemps attribuée à Pythagore, indispensable aux calculs les plus simples, doivent être gravés de bonne heure dans la *mémoire*.

49. La multiplication des nombres entiers présente trois cas.

1er CAS. *Un nombre entier quelconque par un nombre d'un seul chiffre.* Soit

569 . 4

Exécutant cette opération par la voie additive, on aura à faire l'addition de 4 nombres égaux à 569, ou

569
569
569
569

Le total, c'est-à-dire le produit demandé sera, en séparant par des virgules les sommes partielles *indiquées* des divers ordres :

Produit = 5 . 4, 6 . 4, 9 . 4.

Voilà donc trois produits *partiels* dont les multiplicandes sont les chiffres du multiplicande proposé, et dont le multiplicateur commun est le multiplicateur donné; d'où l'on voit que *le produit cherché s'obtiendra en multipliant les divers chiffres du multiplicande par le multiplicateur :* comme ces produits partiels, dont l'ordre d'unité de chacun est celui de son chiffre multiplicande, peuvent contenir des dizaines il faut à leur ensemble appliquer les lois de la numération.

On aura ainsi la règle et le dispositif *pratique* qui suivent :

569
4
———
2276

Pour multiplier un nombre entier par un nombre d'un seul chiffre, écrivez le multiplicateur sous les unités du multiplicande et soulignez le multiplicateur ; multipliez ensuite et successivement en allant de droite à gauche, chacun des chiffres du multiplicande par le multiplicateur ; si les produits partiels ainsi formés ne dépassent pas 9, *écrivez-les sous la*

ligne dans la colonne du chiffre multiplicande correspondant : mais si ces produits dépassent 9, n'en écrivez à cette place que les unités simples pour en reporter les dizaines au produit d'ordre immédiatement supérieur; le dernier produit s'écrit en entier.

Observation. En considérant, comme nous venons de le faire implicitement, le nombre

$$569 = 500 + 60 + 9$$

décomposé en ses parties, on est conduit en général à répéter par addition et de la même manière une somme quelconque

$$42 + 30 + 14$$

Et l'on trouve que : *Pour multiplier une somme de plusieurs nombres, on peut multiplier chacune des parties de cette somme.*

50. 2me CAS. *Un nombre entier quelconque à multiplier par un chiffre significatif précédé d'un nombre quelconque de zéros.*

Le multiplicateur est donc ici un nombre élémentaire d'ordre déterminé ; par exemple, soit,

$$569 \cdot 400$$

Changeant l'ordre des facteurs, ce qui n'altère pas le produit (45), on a :

$$400 \cdot 569$$

Effectuant ce dernier produit par l'addition :

400
400
400
»
»

dans laquelle 400 *est pris* 569 *fois*, il viendra :

4 · 569,00.

Dans cette somme figure le produit 4 · 569 d'un multiplicande d'un seul chiffre par un multiplicateur qui en a plusieurs ; n'ayant pas encore traité ce cas, nous alternerons les deux facteurs de ce produit, et nous obtiendrons :

569 · 4,00

La démonstration serait analogue si au lieu de 4 on avait un nombre entier. Résultat qui donne lieu à la règle :

Pour multiplier un nombre entier par un chiffre significatif, (ou même par un nombre quelconque), précédé d'un ou de plusieurs zéros, il suffit de multiplier le nombre par ce chiffre et d'écrire à la droite du produit ainsi obtenu, autant de zéros qu'il y en a à la droite du chiffre multiplicateur.

51. 3me cas. *Les deux facteurs sont des nombres entiers quelconques.* Soit

569 . 427

Changeant l'ordre des facteurs, on a

427 . 569

Effectuant encore ce produit par l'addition

427
427
427
»
»

De 569 nombres égaux à 427, on obtient :

Produit = 4 · 569, 2 . 569, 7 . 569

Le second membre contenant trois produits partiels dont le multiplicande n'a qu'un seul chiffre, changeons de nouveau l'ordre des facteurs, et il viendra

Produit = 569 · 4, 569 · 2, 569 · 7

Cette dernière forme prouve qu'il faut multiplier le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur ; la



numération s'applique ensuite au rapprochement de ces produits partiels et l'on trouve cette loi et ce dispositif de multiplication :

Pour multiplier deux nombres entiers quelconques, on multiplie successivement le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on écrit ces divers produits partiels les uns en dessous des autres de manière que le premier chiffre à droite de chaque produit partiel, soit dans la colonne du chiffre multiplicateur qui l'a donné; la somme de tous ces produits partiels est le produit demandé.

52 Remarque. *Dans le cas particulier où l'un des facteurs d'un produit, ou tous les deux ont un certain nombre de zéros à leur droite, on effectue la multiplication en faisant abstraction de ces zéros, et l'on écrit à la droite du produit obtenu autant de zéros qu'il y en a à la droite de chaque facteur.*

53. *Nombre des chiffres d'un produit.*

Théorème III. *Un produit de deux facteurs a autant de chiffres qu'il y en a ensemble dans ses facteurs, ou un chiffre de moins.*

Démonstration. Supposons que le multiplicateur ait 4 chiffres ; il est au moins égal à l'unité précédée de 3 zéros et moindre que l'unité ayant 4 zéros à sa droite ; donc le produit sera compris entre le multiplicande précédé de 3 zéros et le multiplicande précédé de 4 zéros ; donc il aura au moins 3 chiffres et au plus 4 de plus que le multiplicande.

54. *Méthode abrégée de multiplication.*

On fait *souvent* usage d'un procédé, qu'il est convenable de connaître, et qui permet d'écrire immédiatement le produit définitif, sans former les produits partiels intermédiaires.

Soit pour exemple explicatif :

$$\begin{array}{r} 38079 \\ 8016 \\ \hline 305241264 \end{array}$$

D'après les règles de la multiplication, il est clair qu'il faudra exécuter ici 20 multiplications partielles; toute la difficulté, ou pour nous exprimer plus rigoureusement, toute l'attention consistera à saisir dans ces 20 produits ceux d'un ordre désiré, et de les ajouter *au fur et à mesure* de leur formation. Il sera toujours facile de trouver tous les produits d'un ordre désigné; supposons en effet que l'on veuille obtenir l'*ordre des mille du produit :* on aura d'abord les produits partiels

$$8 \cdot 9 + 8 \cdot 6$$

Ensuite on remarque que l'ordre des unités du produit ne change pas quand on avance à la fois d'un *rang vers la* DROITE dans le multiplicande et d'un *rang vers la* GAUCHE dans le multiplicateur ou inversement. On aura ainsi :

Ordre des mille = 8.6 + 8.9 + 0.7 + 0.1 + report de l'ordre précédent

D'après cela, on saisira facilement le détail suivant des opérations :

Unités = 9 . 6	= 54,	4 à poser	et 5 à report.		
dizaines = 7.6 + 1.9 + 5	= 56,	6	»	5	»
centaines = 0.6 + 0.9 + 7.1 + 5	= 12,	2	»	1	»
mille = 8.6 + 8.9 + 0.1 + 0.7 + 1	= 121,	1	»	12	»
diz. de mille = 3.6 + 8.1 + 8.7 + 0.0 + 12	= 94,	4	»	9	»
cent. de mille = 3.1 + 8.0 + 0.8 + 9	= 12,	2	»	1	»
millions = 8.8 + 1	= 65,	5	»	6	»
dizaines de millions = 3.8 + 6	= 30,	30	»		

55. Observons encore qu'en opérant dans la multiplication de droite à gauche, on jouit de cet avantage d'effectuer sans rectification les reports; c'est ce qui ne se présenterait pas si l'on opérait en sens inverse.

56. *Faire le produit de plusieurs facteurs* c'est multiplier les deux premiers, le résultat obtenu par le troisième, ce résultat par le quatrième, et ainsi de suite.

Le produit d'un certain nombre de *facteurs égaux* prend le nom de *puissance;* la *base* de cette puissance est le facteur répété par multiplication, et le *degré* de la puissance est le nombre ou la quotité des facteurs égaux pris par voie *factorielle.*

En particulier, le produit d'un nombre par lui-même s'appelle *carré* ou *seconde puissance;* si ce nombre est pris trois fois comme facteur, le produit se nomme *cube* ou *troisième puissance.*

Dans notre système de numération, les unités numératives des divers ordres sont des puissances de la base 10.

Pour écrire une puissance d'un nombre, on écrit au-dessus de lui, et un peu à droite, le *degré* qui prend dans cette disposition le nom d'exposant.

Ainsi $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

De même a^b signifie la b^{me} puissance de a.

Réciproquement le nombre qui, pris un certain nombre de fois comme facteur, fournit une puissance donnée, prend le nom de *racine de cette puissance.*

Le degré de la racine, pour reproduire par multiplication la puissance, porte le nom d'*indice.*

Ainsi 2 est la racine cinquième de 32, et 5 en est l'indice.

On représente une racine d'un nombre à l'aide du signe

$$\sqrt{}$$

sous la barre horizontale duquel on place ce nombre, et dans l'angle duquel on place l'indice; de sorte que l'on a :

$$2 = \sqrt[5]{32}$$

Au lieu de dire racine deuxième, racine troisième, on dit racine carrée, racine cubique.



57. Théorème iv. *Pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de le multiplier successivement, par les facteurs de ce produit.*

Démonstration. Soit à effectuer (N étant le nombre donné),

$$N. \ (a. \ b \ c.)$$

Soit N' le produit auquel donne lieu $a \ b \ c$; on a (45) :

$$N. \ N' = N'. \ N$$

ou bien

$$N. \ (a. \ b. \ c.) = a. \ b. \ c. \ N.$$

Intervertissant l'ordre des facteurs dans le second produit, il viendra :

$$N. \ (a. \ b. \ c.) = N. \ a. \ b. \ c.$$

57. corollaire i. *On multiplie un produit par un nombre, en multipliant par ce nombre l'un quelconque des facteurs.*

Démonstration. Ayant $a, b. c.$ à multiplier par N, il viendra (57) :

$$(a. \ b. \ c.) \ N = N. \ a. \ b. \ c.$$

Le second membre peut être regardé comme le résultat de $(N. \ a.) \ b. \ c$; d'où

$$(a. \ b. \ c.) \ N = (N. \ a.) \ b. \ c.$$

Donc pour obtenir le produit $(a. \ b. \ c.) \ N$, il suffit de multiplier par N l'un quelconque des facteurs du multiplicande. (c q. f d).

59. Corollaire ii. *Pour multiplier deux produits, il suffit de former un produit unique avec les facteurs du multiplicande et ceux du multiplicateur.*

Démonstration. Soit

$$(a. \ b. \ c.) \ (a'. \ b'. \ c'.)$$

Posons $a. \ b. \ c = N$ et il viendra (en vertu de 57),

$$(a. \ b. \ c) \ (a'. \ b'. \ c') = N \ (a'. \ b'. \ c') = N. \ a'. \ b'. \ c'$$

Et remplaçant N par sa valeur :

$$(a.\ b.\ c)\ (a'.\ b'.\ c') = a.\ b.\ c.\ a'.\ b'.\ c'. \qquad (c.\ q.\ f.\ d)$$

60. Théorème v. *Le produit de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce même nombre, dont le degré est la somme des degrés des puissances facteurs.*

Démonstration. a, n *et* p étant des nombres entiers on a évidemment

$$a^n.\ a^p = a.\ a.... \times a.\ a.....$$

Dans le second membre les facteurs à gauche du signe ($\times$) sont au nombre de n, et ceux à droite en nombre p; le nombre a y entre donc en tout $n + p$ fois comme facteurs, et comme pour multiplier deux produits, il faut multiplier entr'eux les facteurs de chacun de ces produits, on aura :

$$a^n\ a^p = a^{n+p} \qquad . \qquad (c.\ q.\ f.\ d)$$

61. Corollaire i. *On élève une puissance d'un nombre à une nouvelle puissance, en multipliant l'exposant de la première puissance par l'exposant de la seconde.*

Démonstration. Soit a^n à élever à la k^e puissance,

On sait par définition que

$$(a^n)^k = a^n.\ a^n.\ a^n$$

D'où (60),

$$(a^n)^k = a^{n+n+n+\cdots\cdots} = a^{kn} \qquad (c.\ q.\ f.\ d)$$

62. Corollaire ii. *On élève un produit à une puissance en élevant chaque facteur à cette puissance.*

Démonstration. Soit le produit $a.\ b.\ c$ à élever à la n^e puissance.

On a

$$(a.\ b,\ c)^n = a.\ b.\ c \times a.\ b.\ c \times a.\ b.\ c \times \ldots.$$

Dans le second membre le nombre des produits séparés par le signe ($\times$) est n, et comme on multiplie des produits en

multipliant dans un ordre quelconque leurs divers facteurs, il viendra

$$(a.\ b.\ c)^n = a.\ a.\ a\ ..\ \times b.\ b.\ b... \times c.\ c.\ c...$$

ou enfin

$$(a.\ b.\ c)^n = a^n.\ b^n.\ c^n \qquad (c.q.f.d)$$

63. Théorème vi. *On multiplie une somme par une somme en multipliant chacune des parties du multiplicande par chacune de celles du multiplicateur, et réunissant par addition les résultats.*

Démonstration. Soit à effectuer

$$(a + b)\ (c + d)$$

Les nombres donnés étant entiers, et le multiplicateur étant formé de l'unité en prenant d'abord *c* puis *d* unités. il faudra pour obtenir le produit prendre successivement *c* fois, puis *d* fois le multiplicande $a + b$.

Il vient ainsi :

$$(a + b)\ (c + d) = (a + b)\ c + (a + b)\ d.$$

Mais pour multiplier une somme par un nombre il faut (49) multiplier chaque partie de la somme, puis additionner; donc,

$$(a + b)\ (c + d) = a\,c + b\,c + a\,d + b\,d. \quad (c.q.f.d.)$$

64. Pour terminer les généralités relatives à la multiplication, disons que le produit prend aussi le nom de *multiple* de chacun de ses facteurs. Ainsi 12 est un multiple de 2, de 3, de 4, de 6 ; de même *a. b. c* est un multiple de *a*, de *b*, de *c*.

Leibnitz avait adopté pour notation des multiples d'un nombre, le (·) placé au-dessus de ce nombre ; de cette manière l'écriture

$$\dot{3}$$

représente tous les multiples de 3. S'il s'agit d'un

nombre de plusieurs chiffres on place une petite barre entre le point et le nombre, c'est-à-dire que pour indiquer les multiples de 27 on écrira :

$$\dot{\overline{27}}$$

Cette notation de Leibnitz est *oubliée*; nous la croyons courte, avantageuse et significative, puisque le signe (·) est celui de la multiplication, et conséquemment nous proposons d'y revenir.

CHAPITRE IV.

Définition de la soustraction. — Diminuende; diminueur; reste, excès ou différence. — Théorie de la soustraction. — Théorèmes.

65. Nous avons vu (36) que cette opération de décomposition des nombres a pour but de passer promptement et sans intermédiaire d'un nombre à un autre, c'est-à-dire de chercher *combien d'unités il faut ajouter au plus petit de deux nombres donnés pour former le plus grand.*

On a donc cette définition :

La soustraction est une opération qui a pour but de trouver le nombre à ajouter au plus petit de deux nombres donnés pour former le plus grand.

Le plus grand de ces nombres s'appelle *diminuende*, le plus petit *diminueur*; le résultat de l'opération porte le nom de *différence*, *reste* ou *excès*.

66. Lorsque les nombres donnés n'ont qu'un seul chiffre, le reste est facile à déterminer par une simple addition, dont l'habitude doit présenter *spontanément* le résultat à l'esprit. Il en est de même lorsque le diminuende a *deux* chiffres, et que le diminueur n'en a qu'*un*, c'est-à-dire qu'il est indispensable de bien connaître les différences des différents nombres compris entre 1 et 9 inclusivement à ceux compris entre 10 et 18 inclus.

67. Dans une addition, 1° Toute somme partielle qui ne dépasse pas 9 est écrite telle qu'elle a été obtenue.

2° De toute somme partielle qui dépasse 9, le chiffre d'unité est *seul* écrit, et les dizaines en sont reportées par addition à la somme partielle immédiatement à gauche.

Remarque 1re. On peut donc dire :

Dès qu'un chiffre du total n'est pas la somme partielle de l'ordre correspondant, on peut du moins affirmer qu'il est le chiffre d'unité de cette somme.

68. *Remarque* 2e. La plus grande somme de deux chiffres étant évidemment 18, il s'en suit que *lorsqu'on additionne* DEUX *nombres, la plus grande somme partielle est* 18, *et* 19 *en y comprenant les reports qui pourraient avoir lieu.* En d'autres termes, dans cette opération *une somme partielle ne peut jamais contenir plus d'*UNE *dizaine.*

69. Cela posé soit à effectuer

913 — 468

Il faut donc trouver le nombre qui étant ajouté à 468 donne 913 et procéder ainsi à l'addition

468 Diminueur
.... Différence
———
903 Diminuende.

A l'ordre des unités, le chiffre 3 ne peut être la somme de cette colonne; et d'après la remarque (67), il s'en suit que cette somme, *ayant alors 3 pour chiffre d'unité,* renferme des dizaines; mais comme il n'y a ici que deux additifs, et qu'alors (68), une somme partielle quelconque ne peut contenir plus d'une dizaine de son ordre, il est clair que 13 est la somme des unités du reste et du diminueur.

Comme 5 est ce qu'il faut ajouter à 8 pour donner le total partiel 13, 5 *est donc le chiffre d'unité de la différence.*

Exécutant maintenant l'addition des unités, on dira que 8 et 5 font 13, dont 3 de pose et 1 de report; ce report, joint à 6, donne 7, et l'on a à raisonner sur 7 du diminueur et 0 du diminuende comme on vient de le faire sur 8 et sur 3.

On continuera de la sorte jusqu'à la dernière colonne à gauche où le détail de la démonstration

$$\begin{array}{r} 468 \\ 435 \\ \hline 903 \end{array}$$

conduit à chercher ce qu'il faut ajouter à 5 pour obtenir 9; on trouve ainsi que le reste est 435, et l'on déduit cette règle :

Pour faire une soustraction ENTIÈRE, *écrivez le plus petit nombre sous le plus grand de manière que les unités de même nom se trouvent en colonne verticale; soulignez le plus petit nombre, puis en allant de droite à gauche retranchez, si cela se peut, chaque chiffre inférieur du supérieur correspondant et écrivez cet excès sous la ligne dans cette colonne; mais dans le cas contraire, c'est-à-dire si le chiffre supérieur est le plus petit, augmentez ce chiffre de* 10, *et ajoutez* 1 *au chiffre inférieur de la colonne à gauche.*

70. Il serait indifférent de commencer la soustraction par la gauche ou par la droite, dans le cas où chaque chiffre supérieur serait plus fort que l'inférieur correspondant.

71. THÉORÈME I. *Une différence est* CONSTANTE *lorsqu'on en augmente ou qu'on en diminue également les deux termes.*

Démonstration. Par suite de l'un ou l'autre de ces changements il est clair que la différence nouvelle se composera de la différence primitive plus la différence (qui est nulle) entre les changements égaux simultanés du diminuende et du diminueur.

Scholie. On a déduit de cette vérité l'explication du procédé exposé plus haut pour la soustraction des nombres entiers.

On a aussi imaginé la méthode des emprunts; mais ces théories, qui ne reposent que sur des *compensations*, ne sont en réalité que des *artifices de calcul;* elles n'apprennent rien quant à la correspondance que l'on devrait y trouver avec la nature et l'origine de l'opération. C'est pour ce motif que nous avons passé sous silence, en les rejetant, les deux théories ordinairement employées pour l'établissement du procédé soustractif.

72. Si le *diminueur* est lui-même *un reste*, il peut être parfois utile, indispensable même de ne pas calculer directement ce diminueur et malgré cela d'offrir la *forme* de la différence cherchée.

Il faut par exemple de 73 soustraire 11 — 4; on indique alors cette opération en renfermant le diminueur complexe entre parenthèses, et l'on a :

$$73 - (11 - 4)$$

Il est clair que, si au lieu de cette opération, l'on effectuait celle

$$73 - 11$$

on obtiendrait un reste *inférieur* de 4 à celui cherché, puisque l'on aurait ainsi soustrait un nombre *trop* grand de 4; on corrigera donc l'erreur que contient la différence 73 — 11 en ajoutant 4; ce qui fournit

$$73 - 11 + 4$$

Ce raisonnement *général* établit

Théorème ii. *Le reste dont le diminueur est lui-même une différence, est égal à celle des deux diminuendes, augmentée du premier diminueur.*

73. Théorème iii. *Le total de la différence et du plus petit de deux nombres est égal au plus grand.*

Cela résulte immédiatement de la définition de la soustraction.

74. Théorème iv. *Le total de la somme et de la différence de deux nombres est égal au double du plus grand.*

Démonstration. Considérons les deux nombres 25 et 13; il faut prouver que

$$(25 + 13) + (25 - 13) = 25 \cdot 2$$

Pour additionner à la somme 25 + 13 il suffit d'ajouter à l'une quelconque 13 de ses parties, et d'après le théorème précédent le plus petit (13) de deux nombres étant augmenté de la différence 25 — 13 de ces nombres, devient égal au plus grand (25); par cette addition la somme 25 + 13 devient donc 25 · 2. (*c. q. f. d*)

75. Théorème v. *L'excès de la somme sur la différence de deux nombres est double du plus petit.*

Démonstration. En conservant le même exemple que (74), il faut établir que

$$(25 + 13) - (25 - 13) = 13 \cdot 2$$

Il est évident que pour retrancher d'une somme 25 + 13 il suffit de diminuer l'une quelconque 25 de ses parties; or si du plus grand 25 de deux nombres on ôte la différence, on obtient le plus petit 13, donc en retranchant la différence de ces nombres hors de la somme on obtient le double du plus petit.

CHAPITRE V.

Définition de la division. — Dividende, diviseur, quotient entier, fraction complémentaire. — Termes de la division. — Notations de la division. — *Deux nouvelles* théories de la division des nombres entiers. — Théorie de M. Faucheux. — Nombre des chiffres du quotient. — Théorèmes. Identité des idées de fraction et de quotient. — Manière de diriger le choix des chiffres du quotient. — Dispositif abrégé de division.

76. Nous avons (36) fait comprendre que la division n'est qu'une soustraction abrégée, qui permet de trouver combien de fois on peut successivement soustraire un nombre donné hors d'un autre nombre donné ; ainsi par exemple si l'on considère les nombres 12 et 4, et que l'on demande combien de soustractions successives du nombre 4 on peut faire hors de 12, on trouvera 3 ; c'est-à-dire qu'à l'aide de trois additifs égaux à 4 on pourra former 12, ou bien que 4 et 3 sont les deux facteurs du produit 12. *La division* qui décompose les nombres par intervalles égaux mais quelconques, *décompose* donc *l'opération de multiplication*, dont elle recherche certains éléments.

Nous pouvons dès lors adopter cette définition :

La division est une opération par laquelle, étant donnés le produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, on trouve l'autre facteur.

Le produit donné s'appelle *dividende*, le facteur connu s'appelle *diviseur*, et le facteur inconnu est le *quotient*. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, 12 est le dividende, 4 le diviseur et 3 le quotient. — Le dividende et le diviseur sont les deux

termes de la division, le quotient et le diviseur sont les deux facteurs du dividende.

Les signes de division sont,

: ou —

que l'on emploie en plaçant le dividende à gauche et le diviseur à droite du signe (:), tandis que le dividende se place au-dessus et le diviseur au-dessous de la barre (—)

77. *Il arrive souvent qu'il n'existe pas de nombre entier par lequel multipliant le diviseur donné, on reproduise le dividende.* Afin que nos théories s'appliquent à tous les cas, nous distinguerons en général dans un quotient *une partie entière et une fraction.* : cette partie entière s'appelle aussi *quotient entier*, et son produit par le diviseur donne *le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende.* — L'excès du dividende sur ce plus grand multiple est le *reste* de la division, de sorte que *le dividende est égal au produit du diviseur par la partie entière du quotient, plus le reste.*

78. On peut aussi dire que *le dividende est la somme des produits du diviseur par le quotient entier et par la fraction qui en général complète ce quotient.*

Partant de ce point de vue, soit à effectuer la division de 201698 par 23.

1re *Théorie.* Cherchons d'abord de combien de chiffres se compose le quotient entier ; nous avons vu (53) que le produit 201698 contient autant de chiffres ou un de *moins* que ses deux facteurs en contiennent chacun ; *le quotient entier aura donc*, en général AUTANT DE CHIFFRES OU UN DE PLUS *que n'indique la différence des nombres de chiffres du dividende et du diviseur*; ce théorème est très-important.

La partie entière du quotient devra donc toujours avoir *au moins* autant de chiffres qu'il y en a de plus au dividende qu'au diviseur.

Dans le cas actuel cette partie au moins égale à 1000 n'atteindra pas 1000 puisqu'alors le produit

$$23 \cdot 10000, \textit{ ou } 230000$$

devrait être contenu dans le dividende; par suite le quotient entier n'a que *quatre* chiffres.

Le dividende doit désormais être regardé comme la somme des produits partiels du diviseur par chacun des chiffres du quotient entier et par la fraction complémentaire qui peut affecter ce quotient.

Le produit partiel d'ordre le plus élevé est ici *celui des mille*, et comme il ne renferme pas d'unités inférieures à cet ordre, on ne peut le trouver que dans la portion 201 que l'on obtient en isolant vers la droite par un signe quelconque, un point par exemple, les chiffres d'ordre inférieur à celui de mille.

Il est à remarquer que la partie 201 s'obtiendrait ainsi en disant que l'*on sépare sur la gauche du dividende assez de chiffres pour contenir au moins* UNE *fois le diviseur* : en effet, comme nous savons qu'il existe un chiffre de mille, le diviseur est au moins contenu *une* fois dans 201, mais il ne peut y être contenu 10 fois puisque la partie séparée devrait alors être au moins égale à 230, et *qu'ainsi le quotient* contiendrait 5 chiffres au lieu de 4.

On pourra donc, dans la pratique, dire avec simplicité que l'*on isole sur la gauche du dividende assez de chiffres pour que le diviseur soit contenu au moins* UNE *fois dans le nombre ainsi formé.*

Imaginons la table suivante des 9 premiers multiples entiers du diviseur, table qu'il convient d'employer lorsque le quotient a un grand nombre de *figures* ou de chiffres, et que le diviseur en a plus de deux.

$$23 \cdot 1 = 23$$
$$23 \cdot 2 = 46$$

23 · 3 = 69
23 · 4 = 92
23 . 5 = 115
23 · 6 = 138
23 . 7 = 161
23 · 8 = 184
23 · 9 = 207

Dans cette table, choisissons 23 · 8 ou 184 comme étant du diviseur le *plus grand multiple contenu dans la partie* 201, et prouvons que 184 est le produit partiel de mille, et par suite que 8 est la caractéristique de mille du quotient : le chiffre 8 présumé n'est pas *trop petit* puisqu'il faudrait alors, chose impossible, qu'un multiple de 23 plus grand que 23 · 8 fût contenu dans 201; d'autre part le chiffre 8 n'est pas trop grand, car entre 201 et un autre multiple de 23 plus petit que 23 . 8, il y aurait une différence au moins égale au diviseur 23, ce qui permettrait au diviseur d'être encore contenu au moins 1000 fois dans le dividende; il s'en suit de plus que *l'excès de* 201 *sur* 184 *est nécessairement plus petit que* 23. — Le chiffre supposé 8 n'étant ni trop faible ni trop fort est la caractéristique exacte de mille du quotient; soustrayant dès lors le produit partiel 184 correspondant, il restera 17, qui doit être, venons-nous de dire, plus petit que le diviseur. A la droite de ce reste partiel 17 rétablissant la partie 698 non étudiée du dividende, l'on obtiendra

17698

qui est *la somme de tous les autres produits partiels* encore inconnus; sur cette somme il faudra raisonner comme on vient de le faire en isolant d'abord par un point la partie 98 pour découvrir dans 176 centaines le produit partiel des centaines.

D'une manière analogue tous les chiffres du quotient

entier 8769 se détermineront avec facilité et on obtiendra 11 pour *reste*; de sorte que

$$201698 = 23 \cdot 8769 + 11$$

Enfin cherchons la fraction complémentaire du quotient : puisque successivement l'on a retranché du dividende les divers produits partiels, 11 est le produit du diviseur par la fraction, c'est-à-dire que

$$25 \text{ fois la fraction} = 11$$

Donc cette fraction est égale à $\frac{11}{23}$, et l'on a

$$\frac{201698}{23} = 8769 \tfrac{11}{23}$$

Voici le dispositif des opérations :

201.698	23
184	8769
176.98	
161	
159.8	
138	
218	
207	
11	

79. 2e *Théorie*. Pour faciliter et généraliser, nous représenterons les diverses caractéristiques du dividende par des lettres et nous remarquerons qu'un nombre quelconque 8564 peut toujours être considéré comme la somme de 4 unités et de 856 dizaines.

Théorème fondamental. — *Le nombre de dizaines du quotient est égal à la* partie entière *du quotient que l'on obtient en divisant par le même diviseur le résultat de la suppression du chiffre d'unités du dividende.*

Démonstration. Soit D le diviseur et $a\,b\,c\,d\,f\,g\,h$ le dividende; supprimant le chiffre de droite, l'on obtient :

$$a\,b\,c\,d\,f\,g$$

Représentons par R la partie entière du quotient

$$\frac{abcdfg}{D}$$

Comme le diviseur multiplié par le quotient *complet*, qui est plus grand que R et plus petit que R + 1, donne $a\,b\,c\,d\,f\,g$, nous aurons ces deux relations

$$R\,D < a\,b\,c\,d\,f\,g$$
$$(R + 1)\,D > a\,b\,c\,d\,f\,g$$

Multipliant par 10 les deux nombres de ces inégalités, il vient

$$D \cdot R\,o < a\,b\,c\,d\,f\,g\,o$$
$$D.\ (R + 1)\ o > a\,b\,c\,d\,f\,g\,o$$

Mais (R + 1) D et $a\,b\,c\,d\,f\,g$ étant deux nombres entiers, diffèrent au moins d'UNE *unité;* par suite,

$$D\ (R + 1)\ o \text{ et } a\,b\,c\,d\,f\,g\,o$$

diffèrent au moins d'UNE *dizaine;* on comprend ainsi que les deux dernières inégalités seront encore vraies si l'on y remplace par h le o qui termine le nombre $a\,b\,c\,d\,f\,g\,o$; l'on obtient ainsi,

$$D.\ R\,o < a\,b\,c\,d\,f\,g\,h, \text{ d'où } R\,.\,o < \frac{abcdfgh}{D} \qquad (1)$$

$$D.\ (R + 1)\,o > a\,b\,c\,d\,f\,g\,h, \quad \text{»} \quad (R + 1)\,o > \frac{abcdfgh}{D} \qquad (2)$$

Et sous cette dernière forme il devient évident que *le quotient* R *défini par le théorème* est bien le nombre de dizaines du quotient cherché.

COROLLAIRE. Si 10 D < $a\,b\,c\,d\,f\,g$, alors R aura *deux* chiffres et l'on obtiendra le nombre R′ des dizaines de R en prenant la partie entière du quotient



$$\frac{abcdf}{D}$$

Si l'on avait encore

$$10\,D < a\,b\,c\,d\,f$$

on trouverait les dizaînes R'' de *R'* en évaluant la partie entière du quotient

$$\frac{a\,b\,c\,d}{D}$$

et ainsi de suite. — *On est donc conduit à séparer sur la gauche du dividende assez de chiffres pour que le diviseur soit contenu au moins une fois dans cette partie séparée, et n'y soit pas contenu* 10 *fois.*

On obtient de cette manière le chiffre des plus hautes unités du quotient, ce chiffre fournit un produit partiel que l'on soustrait de la partie séparée à la gauche du dividende; *le reste ainsi obtenu est nécessairement plus petit que le diviseur*, car si Q est le quotient, on a, par ordre croissant de grandeur.

$$R.\,10\;D,\;Q.\,D,\;(R+1).\,10\,D$$

Supposons que la partie séparée ait été *a b c*, et que le chiffre déterminé du quotient soit A ; à la droite du reste *a' b' c'*, abaissons le chiffre *d*, on reconstitue ainsi le nombre

$$a\;b\;c\;d$$

dont la partie entière du quotient était le nombre A B de dizaines du quotient

$$\frac{a\,b\,c\,d\,f}{D}$$

Ayant déjà trouvé les dizaines A de A B, pour en avoir les unités B, il suffira de chercher le plus grand nombre de fois que D est contenu dans

$$a'\;b'\;c'\;d$$

de manière que le nouveau reste soit plus petit que D, puisque de cette façon on satisfait encore à la condition générale

$$a\,b\,c\,d < A\,B.\,D < A\,(B+1).\,D$$

A B est donc bien le plus grand nombre de fois que D est contenu dans *a b c d*; c'est-à-dire le nombre de dizaines du quotient

$$\frac{abcdf}{D}$$

On continuera à raisonner de la même manière pour déterminer tous les autres chiffres du quotient.

80. Nos deux théories *nouvelles* qui viennent d'être développées reposent sur le même principe; la seconde, que l'on pourra passer sous silence *à une première étude*, fournit *à priori* le mode de calcul qui est le même pour toutes les deux. La première théorie (78) est donc celle que nous conseillons au début des études mathématiques, tandis que la seconde est destinée à compléter ces études; et nous osons dire que, réduite à de si simples proportions, la théorie de la division est devenue l'un des points les plus faciles de l'arithmétique.

81. Toutefois nous ne pouvons laisser, sans la faire connaître une autre théorie, due à M. *Faucheux* professeur en France, et qui se recommande aussi par sa grande simplicité.

Avant tout, quelques mots sur la multiplication sont nécessaires.

Soit

$$201687 = 8769 \cdot 23$$

Ce produit peut être considéré comme la somme des produits partiels suivants :

$$23 \cdot 9 = 207$$
$$23 \cdot 6 = 138$$
$$23 \cdot 7 = 161$$
$$23 \cdot 8 = 184$$

Du premier produit partiel le chiffre 7 est seul écrit ; le report 20 s'ajoute au second, pour former la somme 158 dont on n'écrit que le chiffre 8 de droite, et ainsi de suite.

Appelons *somme partielle* le total d'un produit partiel et du report correspondant, et par extension appliquons ce nom au produit partiel des unités.

Il est clair que parmi les sommes partielles, *la dernière* (celle d'ordre le plus élevé), *est écrite telle qu'elle a été obtenue à la gauche du produit* 201687 : tandis que de chacune des autres, le chiffre de droite est seul écrit, et représente des unités de même espèce que le chiffre multiplicande qui appartient à son produit partiel.

Faisons voir actuellement que *chacun des reports est plus petit que le multiplicateur* 23 ; pour cela il suffit de remarquer que 9 · 23 est le plus grand produit partiel, qu'ainsi ce maximum moindre que 10·22 prouve que de l'ordre des unités à celui des dizaines il ne peut y avoir 23 de report, et que ce report (*plus petit que* 23) étant ajouté au 2e produit partiel ne pourra donner 10 fois 23 ; le second report est donc aussi inférieur au multiplicateur 23, et il en est de même pour tous les autres.

82. Occupons-nous maintenant de la division

$$\frac{201687}{23}$$

et déterminons d'abord de combien de chiffres se compose la DERNIÈRE *somme partielle* située à la gauche du dividende.

Le plus petit multiple du diviseur étant 23, cette somme partielle doit avoir au moins *deux* chiffres, et elle en a même davantage puisque le nombre 20 formé par l'ensemble des deux premiers chiffres à gauche est plus petit que 23; d'ail-

leurs comme une somme partielle est toujours inférieure à 10 fois 23, celle dont nous nous occupons ne peut avoir plus de trois chiffres : la dernière somme partielle est donc **201**.

On déduit de là cette règle :

Considérez à la gauche du dividende AUTANT *de chiffres qu'il y en a dans le diviseur, ou* UN DE PLUS *si l'ensemble de ces premiers chiffres est plus petit que le diviseur.*

Le produit partiel de 201 *est le multiple de* 23 IMMÉDIATEMENT *inférieur à* 201 ; car tout multiple du diviseur moindre que celui-là aurait avec 201 une différence *au moins égale à* 23, ce qui est impossible attendu que cette différence doit constituer un report.

Ce produit partiel est donc 184.

```
201687 | 23
184    |------
------ | 8769
 176
 161
 ----
  158
  138
  ----
   207
   207
   ---
    0
```

La différence 17 entre 201 et 184 est le report correspondant à la somme partielle dont le chiffre 6 a seul été écrit dans le dividende ; sur la nouvelle somme partielle 176 que l'on forme en écrivant 6 à la droite du report 17, on raisonnera ainsi que sur toutes les autres sommes partielles, comme on vient de le faire, et l'on obtiendra le quotient 8769.

Nous avons choisi pour exemple, dans l'exposé rapide mais suffisant de la belle théorie de M. Faucheux, une division dont le reste est nul ; s'il n'en était pas ainsi, nous avons déjà

vu (78) quel est le sens à attacher à la division des nombres entiers.

83. Des théories précédentes on déduit la règle suivante : *Pour diviser des nombres entiers, écrivez-les sur une même ligne horizontale, le dividende à gauche et le diviseur à droite d'un trait vertical; soulignez le diviseur pour inscrire le quotient sous le trait horizontal. Séparez ensuite à la gauche du dividende assez de chiffres pour que le nombre ainsi isolé, sans en être décuple, soit au moins égal au diviseur; le plus grand nombre de fois que le diviseur est contenu dans cette partie séparée est le chiffre des plus hautes unités du quotient; soustrayez de cette même partie le produit du diviseur par ce chiffre et à la droite du reste ainsi obtenu écrivez le chiffre suivant du dividende; sur le nouveau dividende partiel résultant et sur les suivants, opérez comme il vient d'être dit sur le précédent, et vous obtiendrez successivement les divers chiffres du quotient ainsi que le reste de la division, dont le quotient entier sera complété par une fraction dont le reste est le numérateur et le diviseur le dénominateur.*

84. Nous avons vu (76) que *le dividende est le produit de deux facteurs*, le *diviseur* et le *quotient complet;* il s'en suit que si :

1° Sans altérer le diviseur, l'on multiplie ou l'on divise le dividende par un nombre, le quotient qui est le seul des facteurs dont la variation est possible, devra par sa multiplication ou par sa division, donner le changement imposé au dividende-produit. D'où

Théorème I. *Sans changer le diviseur, si le dividende est multiplié ou divisé par un nombre, le quotient est lui-même multiplié ou divisé par ce nombre.*

85. 2° Sans altérer le dividende, l'on multiplie ou l'on di-

vise le diviseur : le produit étant constant, il est nécessaire que le quotient, second facteur de ce produit, subisse une variation inverse de celle reçue par le premier facteur qui est le diviseur. D'où

Théorème ii. *Sans changer de dividende, si le diviseur est multiplié ou divisé par un nombre, le quotient est divisé ou multiplié par ce nombre.*

86. 3° Si l'on voulait, en faisant varier simultanément le dividende et le diviseur, conserver le même quotient, il faudrait opérer ces variations dans le même sens et de la même quotité, par voie de multiplication ou de division. On a ainsi

Théorème iii. *En multipliant ou en divisant par le même nombre les deux termes d'une division, on ne change pas le quotient complet, dont le reste est divisé ou multiplié par ce nombre.*

Pour établir le dernier point relatif au reste, soit A et B le dividende et le diviseur, Q le quotient et R le reste; on aura

$$A = BQ + R$$

Multipliant par un nombre quelconque n, on aura

$$An = BQn + Rn$$

Et intervertissant l'ordre de multiplication,

$$An = Bn \, . \, Q + Rn$$

Mais on a

$$R < B$$

D'où

$$Rn < Bn$$

Donc R n est le reste de la division

$$\frac{An}{Bn}$$

(*c. a. b. d.*)

87. Théorème iv. *Pour diviser un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de le diviser successivement par les facteurs du produit.*

Démonstration. Soit la division

$$\frac{A}{p.r.s.t.}.$$

Divisant d'abord A par p, et soit q le quotient, divisons ensuite q par r, et représentons par q' le quotient; divisons encore q' par s, et désignons par q'' le quotient; enfin divisons q'' par t et appelons Q le quotient.

Nous aurons, en notant bien qu'il s'agit ici de quotients complets,

$$\left.\begin{aligned} A &= p\,q \\ q &= r \cdot q' \\ q' &= s \cdot q'' \\ q &= t \cdot Q \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il viendra :

$$A \times q.q'.q'' = p.r.s.t \times q.q'.q'' \times Q$$

ou

$$\frac{A.q\,q'\,q''}{p\,r\,s\,t.q\,q'\,q''} = Q$$

Comme on peut (86) diviser les deux termes de la division contenue dans le premier membre, par un même nombre $q\ \ q'\ \ q''$, sans changer le quotient Q, il s'en suit

$$\frac{A}{p.r.s.t.} = Q \qquad (c.q.f.d)$$

88. Théorème v. *Pour diviser le produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de diviser par ce nombre l'un quelconque des facteurs, et de multiplier ensuite le quotient par les autres facteurs.*

Démonstration. Soit la division

$$\frac{p\,r\,s\,t}{A}$$

Cherchant le quotient Q par A de l'un quelconque r des facteurs du dividende, prouvons que

$$Q\,p\,s\,t$$

est le quotient cherché ; en effet,

$$Q\,p\,s\,t = \frac{r}{A}\cdot p.\,s.\,t.$$

Or nous savons (84) que l'on multiplie un quotient $\frac{r}{A}$ par un nombre $p\,s\,t$ en multipliant le dividende par ce nombre ; le dernier produit revient donc à

$$\frac{r\,p\,s\,t}{A}$$

qui est bien le quotient demandé.

Ce que l'on a fait et dit sur le facteur r se répéterait sur l'un quelconque des autres facteurs du dividende proposé.

89. Théorème vi. *On divise l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, en prenant pour exposant de ce nombre en quotient, la différence des exposants des deux termes de la division.*

Démonstration. Soit la division

$$\frac{2^7}{2^3}$$

Le quotient multiplié par le diviseur 2^3 devrait reproduire 2^7 ; il s'en suit que 7 est la somme de deux nombres dont l'un est 3, et dont l'autre est par suite 7 — 3 ; d'où l'on voit que

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$$

90. Les idées de quotient, de fraction et de nombre fractionnaire sont identiques ; cette identité est établie par la propriété suivante :

Théorème vii. *Le quotient d'une division entière est égal à*

l'expression fractionnaire dont le numérateur est le dividende et le dénominateur, le diviseur.

Démonstration. Soit la division

$$\frac{p}{q}$$

On sait (84) que l'on rend un quotient p fois moindre en divisant son dividende par p, donc

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} \cdot p$$

Actuellement il faudra partager l'unité 1 en q parties égales, et prendre p fois l'une des parties ainsi obtenues : de là ressortent évidemment les rôles de dénominateur et de numérateur, joués respectivement par q et p.

91. *Manière de diriger le choix des chiffres du quotient.*

Chaque chiffre du quotient s'obtient, comme on a vu, à l'aide d'une division partielle que l'on fait en commençant par chercher deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure du quotient ; on essaye ensuite les chiffres compris entre ces limites, pour déterminer celui qui, multiplié par le diviseur, donne le plus grand produit inférieur au dividende partiel. Indiquons un procédé d'essai plus rapide.

Soit le dividende partiel 1132 à diviser par 293.

Le chiffre *limite-supérieur* est le quotient entier de 11 par 2, et l'on trouve ainsi 5, celui *limite-inférieur* s'obtient en divisant 11 par le premier chiffre 2 à gauche du diviseur, et en ajoutant 1 à ce chiffre parce que le second chiffre du diviseur est plus grand que 5 : 3 est donc le *chiffre inférieur-limite.*

Il faut choisir entre les chiffres 5, 4, 3 ; pour cela prenant *à moins d'une unité près*, le cinquième et le quart de 1132, on trouve

226, 283.

Ces nombres étant plus petits que le diviseur 293, il est

clair que le produit de 293 par leurs diviseurs respectifs 5 et 4 seraient plus grands que 1132, et que *les chiffres* 5 *et* 4 *sont à rejeter*.

Le chiffre 3 est donc le chiffre du quotient.

92. Ordinairement on *abrége* la division en faisant les soustractions au fur et à mesure que l'on trouve les produits du chiffre essayé au quotient par les différentes parties du diviseur. — Exemple.

```
201698 | 23
 176   | 8769
  159
   218
    11
```

On retranche ainsi du dividende partiel, aussitôt qu'on l'a obtenu, chaque produit d'un chiffre du diviseur par le quotient partiel. On soustrait ce produit du chiffre du dividende exprimant des unités de même ordre que celle du chiffre multiplié dans le diviseur; on augmente ordinairement ce chiffre du dividende d'un nombre de dizaines suffisant pour qu'on puisse soustraire, puis on augmente par compensation d'autant de dizaines le produit du chiffre suivant à gauche du diviseur.

EXERCICES.

1. Enoncer le nombre 203004010060500908007, ainsi que le moyen très-abrégé de lecture.

2. Ecrire en chiffres le nombre *quatre vingt-trois septillions neuf cent huit quintillions six trillions vingt billions neuf mille trois cent sept.*

3. Trois personnes se sont partagé une somme : la première a eu 3452 francs, la seconde autant que la première et

743 francs de plus, la troisième autant que les deux autres et 968 de plus. On veut connaître la part de chaque personne et la somme partagée.

4. Le quatorzième pic de l'Himalaya est élevé de 1291 mètres au-dessus du Chimborazo ; le Chimborazo de 1720 mètres au-dessus du Mont-Blanc ; le Mont-Blanc de 1100 mètres au-dessus du pic de Ténériffe ; le pic de Ténériffe de 833 mètres au-dessus du pic du Midi ; le pic du Midi de 968 mètres au-dessus du Mont-Ventoux ; le Mont-Ventoux de 444 mètres au-dessus du Puy-de-Dôme ; le Puy-de-Dôme de 267 mètres au-dessus du Vésuve ; enfin le Vésuve est élevé de 1198 mètres au-dessus du niveau de la mer. Quelle est la hauteur de chacune des autres montagnes au-dessus du même niveau ?

5. On appelle *complément* d'un nombre le nombre qu'il faut lui ajouter pour obtenir une unité d'ordre immédiatement supérieure à celles de son premier chiffre à gauche.

Quels sont les compléments des nombres 4. 602, 3246, 512800. En déduire une règle simple pour l'écriture immédiate de ces compléments.

6. Théorème. Le complément d'un nombre entier quelconque se compose, en allant de droite à gauche, du complément à 10 du premier chiffre à droite et des compléments à 9 de chacun des autres chiffres.

7. Théorème. La différence de deux nombres est égale au total du plus grand et du complément du plus petit, total dont le chiffre 1 qui se trouve nécessairement à gauche a été supprimé.

Ainsi $58 - 39 = 58 + c^{t} 39 - 100.$

En quoi cette transformation peut-elle simplifier la soustraction ?

8. Théorème. Le total de deux nombres est égal à l'excès du plus petit à la gauche duquel on écrit 1, sur le complément du plus grand.



9. A l'aide des compléments effectuer les opérations

$$89319 - 8739 - 12541 + 7813 - 45625 + 708.$$

10. Six personnes se sont partagé une somme, de manière qu'elles ont eu respectivement : la première 3245 francs, la deuxième autant que la première et la quatrième, la troisième autant que la deuxième et la sixième, la quatrième 1461, la cinquième autant que la troisième et la quatrième, et enfin la sixième 741 francs. Quelle est la part de chaque personne et le montant de la somme partagée.

11. Deux courriers, allant à la rencontre l'un de l'autre, partent en même temps de deux villes opposées. L'un fait 4 kilomètres pendant la première heure, et augmente sa marche de 1 kilomètre à chaque heure ; l'autre fait 2 kilomètres pendant 1 heure et augmente sa marche de 1 kilomètre à chaque heure. Sachant que la rencontre a eu lieu après 12 heures de marche, on demande les espaces parcourus par les deux courriers, ainsi que la distance des deux villes.

12. Un père et son fils ont ensemble 70 ans ; si l'on retranche 20 ans de l'âge du père pour les joindre à celui du fils, ils auront chacun le même âge. Quels sont les âges de ces deux personnes.

13. Un ivrogne va dans un cabaret avec une certaine somme, et après y avoir dépensé 8 francs, il va dans un autre, emprunte autant d'argent qu'il lui en reste, et dépense encore 8 francs. Il entre dans un troisième, puis dans un quatrième cabaret, emprunte chaque fois autant d'argent qu'il lui en reste, puis fait la même dépense de 8 francs, et il ne lui reste rien. On demande combien il avait avant de boire, et combien il a emprunté chaque fois.

14. On compte 29 secondes ou battements de pouls entre un éclair et le bruit du tonnerre; on sait que le son parcourt

337 mètres par seconde. On demande à quelle distance se trouve le nuage d'où sort l'explosion.

15. La suite naturelle des 45632 premiers nombres entiers étant écrite sans séparation des divers chiffres, on demande de combien de chiffres se compose cette suite.

17. Théorème. Le produit de deux nombres *compris* entre 5 et 10, s'obtient à l'aide des doigts comme suit : on ferme d'abord les deux mains; on lève ensuite autant de doigts de chacune que l'indique le *complément* de chaque facteur. On fait le produit de ces deux nombres de doigts, et on lui ajoute autant de dizaines qu'il y a de doigts fermés.

18. Trouver le produit 942567.83461 en ne faisant que deux multiplications, la première par 8, la seconde par 2.

19. Trouver le produit 942567.68543 en ne faisant que la seule multiplication par 3.

20. Quel changement éprouve un produit, quand l'un de ses facteurs est augmenté ou diminué d'un nombre quelconque.

21. 1024 kilogrammes d'eau de mer contiennent 10 kilogrammes de sel; combien faudra-t-il y ajouter d'eau douce, pour que, sur 512 kilogrammes du mélange, il n'y ait plus que 2 kilogrammes de sel.

22. Théorème. Le produit d'un nombre par une puissance de 5 s'obtient en écrivant à la droite de ce nombre autant de zéros qu'il y a d'unités dans le degré de cette puissance, et en divisant le nombre ainsi formé par une puissance de 2 dont le degré est égal à celui de la puissance de 5.

(Ainsi si le diviseur est 625, c'est-à-dire 5^4, on écrit quatre zéros à la droite du multiplicande, et l'on divise ensuite par 2^4 ou 16).

23. Théorème. Le quotient d'un nombre par une puissance

de 5 s'obtient en multipliant le dividende par une puissance de 2 dont le degré est celui de la puissance diviseur, puis en séparant par une virgule décimale, à la droite du produit autant de chiffres que l'indique ce même degré.

24. La somme de deux nombres est 13, et leur produit divisé par le plus petit est égal au quart de ce même produit. Quels sont ces nombres.

25. Le père et le fils ont 80 ans, et si l'âge du fils était doublé, il aurait dix ans de plus que son père.

26. La somme de deux nombres est 108, leur quotient est 5 ; et l'on veut connaître ces nombres.

27. La différence de deux nombres demandés est 684 et leur quotient est 37.

28. Partager 84 en deux parties, de manière que leur produit soit 1508 et qu'en diminuant l'une des parties de 13, le produit soit 1170.

29. Une garnison de 1250 hommes est renfermée dans un fort, et l'on calcule qu'en donnant 18 onces de pain par jour à chaque homme, on aura de la farine pour 150 jours ; mais le général trouve que cette garnison est trop faible, et l'augmente d'un nombre tel d'hommes, qu'en donnant par jour la même quantité de pain à chaque homme, il n'y aura plus de farine que pour 125 jours. De combien d'hommes cette garnison a-t-elle été augmentée ?

30. Le frère et la sœur ont eu en cadeau 30 oranges; si la sœur en donnait 9 au frère, il en aurait 5 fois autant qu'elle. Combien en avait-il d'abord ?

31. Un commissionnaire qui a porté des vases de deux grandeurs, savoir, 18 grands et 34 petits, aurait reçu pour son paiement 192 francs ; mais ayant cassé tous les grands, on lui retient sur le prix des petits, ce qu'on lui aurait payé

pour les grands s'il ne les eût pas cassés; et de cette manière il ne reçoit que 12 francs. Combien payait-on pour chaque vase?

32. Deux personnes ont partagé 32 francs, de manière que si la première eût touché 60 francs et la seconde 20 francs de plus qu'elles n'ont eu réellement chacune, la première eut possédé trois fois autant que la seconde. Effectuez le partage.

33. Le plus petit de deux nombres surpasse leur différence de 7 et leur somme est 41. Quels sont ces nombres?

34. Partager 72 francs entre 4 personnes, de manière que le produit des deux premières parts soit 126; que la troisième soit égale à la différence de la première à la deuxième, et qu'enfin la quatrième ait autant que les trois autres.

35. Un chat guette une souris éloigné de 24 pieds; il s'en approche ne faisant que 5 pieds par quart d'heure et la souris s'éloignant de 3 pieds dans le même temps. On demande combien d'heures il faudra au chat pour atteindre la souris.

36. Trois amis se mettent au jeu avec une certaine somme; ils conviennent de ne jouer que trois parties, et que chacun sera banquier à son tour. Les conventions faites et les parties terminées, le banquier a perdu chaque fois avec ses deux adversaires autant d'argent qu'ils en avaient chacun avant de commencer la partie : à la fin du jeu, ils ont chacun 64 francs. Combien avaient-ils chacun en entrant au jeu.

37. Partager 24 en deux parties de manière que l'une jointe au sextuple de l'autre donne 59.

38. Former la longueur du mètre en plaçant 45 pièces d'or de 40 francs et de 20 francs à la suite les unes des autres. Les dimensions respectives des pièces sont 26 et 21 millimètres (le mètre vaut 1000 millimètres).

39. Un père donne pour étrennes à ses trois enfants une bourse, un portefeuille et une bombonnière. La bourse coûte 6 francs, et la bombonnière coûte le double du portefeuille; la bombonnière et le portefeuille coûtent trois fois autant que la bourse. Quel est le prix de chaque objet?

40. Un particulier a deux vases et un seul couvercle d'argent du prix de 30 francs. Le couvercle, mis sur le premier vase le fait valoir autant que le second; mais mis sur le second, il le fait valoir le triple du premier. Quel est le prix de chaque vase?

41. Le frère et la sœur ont chacun un certain nombre d'oranges; si le frère en donnait 1 à la sœur, ils en auraient autant l'un que l'autre; si la sœur, au contraire, en donnait 1 au frère, ce dernier en aurait deux fois autant qu'elle. Combien en ont-ils chacun.

42. Un pêcheur, pour encourager son fils, lui promet 5 centimes pour chaque coup de filet dans lequel il y aura du poisson, mais le fils remettra au père 3 centimes pour chaque coup infructueux. Après 12 coups, le fils reçoit 28 centimes; combien a-t-il eu de coups nuls.

—

LIVRE III.

—

DIVISIBILITÉ ET THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

—

CHAPITRE I.

Multiple ; sous-multiple , diviseur , facteur , partie aliquote ; équimultiples. — Nombres premiers , et nombres premiers entre eux. — Résidu. — Théorèmes fondamentaux. — Caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3, 11, 7. — Théorie du plus grand commun diviseur de deux et de plusieurs nombres. — Plus grand nombre de divisions que peut exiger la recherche du plus grand commun diviseur; théorèmes et limites de MM. Lamé et Lionnet. — Recherche du moindre multiple.

93. Nous avons déjà dit que l'on appelle *multiple d'un nombre*, un produit dont ce nombre est un des facteurs.

On donne le nom de *sous-multiple*, de *diviseur*, de *facteur*, ou de *partie aliquote* d'un nombre entier donné, aux éléments entiers qui par multiplication reproduisent ce nombre.

Deux nombres sont *équimultiples* lorsqu'ils sont les produits de deux facteurs inégaux par un même troisième.

Pour représenter un multiple ou un sous-multiple d'un nombre, nous ferons usage du signe (·) de la multiplication,

ou de celui (:) de la division, en plaçant ces signes un peu au-dessus du nombre considéré : ainsi,

$$\dot{7} \quad \text{et} \quad \overset{:}{8}$$

désignent d'une manière générale tous les multiples de 7 et chacun des diviseurs ou parties aliquotes de 8. Quand le nombre a plusieurs chiffres on le *surligne*, comme suit :

$$\dot{\overline{17}} \quad \text{et} \quad \overset{:}{\overline{48}}$$

94. On convient de dire qu'un nombre est divisible par un autre, lorsqu'il en est un multiple, c'est-à-dire quand le reste de sa division par cet autre est nul.

En parcourant attentivement l'échelle ascendante des nombres entiers, on remarque bientôt certains nombres qui n'ont pas de sous-multiples et l'on nomme ainsi *nombre premier* tout nombre qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité.

De plus on dit que *deux nombres sont premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont que l'unité pour diviseur commun.

Ainsi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc. sont des nombres premiers ; et 16 et 21 sont premiers entr'eux, attendu que parmi les facteurs de l'un quelconque de ces nombres, aucun ne divise l'autre.

Il est évident que deux nombres premiers sont *premiers entr'eux*.

Disons aussi en passant que le reste d'une division porte aussi le nom de *résidu*.

95. Théorème I. *Tout diviseur de plusieurs nombres est diviseur de leur somme.*

Démonstration. Soit la somme

$$42 + 35 + 14$$

composée de trois multiples de 7, et prouvons que cette somme est elle-même un multiple de 7. En désignant par q, q', q'' les quotients *entiers*, (par suite des conditions du théorème) des nombres 42, 35 et 14 par 7, nous aurons :

$$42 = q \cdot 7$$
$$35 = q' \cdot 7$$
$$14 = q'' \cdot 7$$

L'addition membre à membre de ces égalités conduit à cette autre

$$42 + 35 + 14 = q \cdot 7 + q' \cdot 7 + q'' \cdot 7$$

Mais si l'on considère la somme $q + q' + q''$ des quotients et qu'on la multiplie par 7 suivant la règle (49), on obtient précisément $q \cdot 7 + q' \cdot 7 + q'' \cdot 7$ d'où l'on voit que

$$42 + 35 + 14 = (q + q' + q'')\ 7$$

Relation qui signifie que le diviseur 7 multiplié par le nombre entier $q + q' + q''$ donne le dividende ou la somme $42 + 35 + 14$, *qui est par suite divisible par* 7.

96. Corollaire. *Tout diviseur d'un nombre l'est aussi de tous les multiples de ce nombre.*

Démonstration. En effet, considérons 2 comme sous-multiple de 6 et prouvons que *tout multiple de* 6 *est divisible par* 2 ; on a

$$\dot{6} = 6 + 6 + 6 + \ldots\ldots$$

Or, nous venons de voir que si les différentes parties, ici toutes égales à 6, d'une somme $\dot{6}$ sont divisibles par un nombre 2, il en est de même de la somme.

97. Théorème II. *Tout diviseur de deux nombres divise leur différence.*

Démonstration. Soit

$$28 = 42 - 14.$$

On dit que 42 et 14 sont multiples de 7, et il faut établir que la différence 28 de ces nombres est aussi multiple de 7.

On a donc, en représentant par q et q' les quotients entiers de ces nombres par 7, et par q'' le quotient quel qu'il soit de 28 :

$$42 = q \cdot 7$$
$$14 = q' \cdot 7$$
$$28 = q'' \cdot 7.$$

Additionnant les deux dernières égalités, puis comparant le résultat avec la première, nous aurons

$$q' \cdot 7 + q'' \cdot 7 = q \cdot 7$$

en vertu de la remarque du numéro 49,

$$(q' + q'')\, 7 = q \cdot 7.$$

Ces deux produits égaux ayant un facteur commun, il s'en suit évidemment :

$$q' + q'' = q$$

Mais q et q' sont des nombres entiers, donc *q'' est aussi entier.* (c.q.f.d.)

98. Corollaire. *Tout nombre qui en divise deux autres, divise le reste de la division.*

Démonstration. Soient les nombres A et B *multiples d'un même nombre d*; en divisant le plus grand A par B, on a un quotient Q et un reste R, et par suite (77)

$$A = B \cdot Q + R.$$

Puisque d est diviseur de B il l'est aussi de B · Q (96) ; d



divise donc les nombres A et BQ, et par conséquent est sous-multiple de leur différence R.

99. Théorème III. (*) *Une somme de nombres entiers étant donnée, son résidu par un nombre donné est égal à celui de la somme des résidus des parties.*

Démonstration. Soit un nombre N décomposé en ses parties P, P′ P″, etc.

$$N = P + P' + P'' \ldots\ldots\ldots$$

Soit D un autre nombre *quelconque.* En général, un nombre quel qu'il soit, est égal à un multiple d'un nombre donné plus un résidu, toujours plus petit que ce nombre donné ; en désignant donc par R_1 R R′ R″, les résidus respectifs par rapport à D de N,P,P′,P″, nous aurons en réunissant les divers multiples de D, provenant des parties de N :

$$\dot{D} + R_1 = \dot{D} + R + R' + R'' \ldots\ldots$$

La somme R + R′ + R″ + ... des résidus, pouvant être supérieure à D, représentons par R'_1 le résidu de cette somme, et il viendra

$$\dot{D} + R_1 = \dot{D} + R'_1$$

Or, pour qu'en ajoutant des nombres R_1 et R'_1 moindres chacune que D, à des multiples de D, les sommes soient égales, il faut évidemment que les multiples de D soient égaux et que l'on ait

$$R'_1 = R_1 \ldots. \qquad (1)$$

Egalité qui démontre que le résidu de R + R′ + R″ est le même que celui de N.—

(*) Ce théorème général aurait pu dispenser des propriétés précédentes qui s'en déduisent avec facilité et promptitude ; pour nous conformer aux usages ordinaires, nous avons cru bien faire en ne supprimant pas les démonstrations immédiates des numéros 95, 96, 97, 98.— Le lecteur jugera !

100. Corollaire i. *Lorsque la somme de plusieurs nombres est multiple d'un autre, le résidu par cet autre de la somme des résidus partiels est nul.*

Démonstration. L'égalité précédente, dans laquelle R_1 est nul, puisque N est multiple de D, devient :

$$R'_1 = 0 \qquad (c.q.f.d)$$

101. Corollaire ii. *Tout diviseur de plusieurs nombres divise leur somme.* (th. I.)

Démonstration. Tous les résidus partiels devenant nuls, l'expression (1) du numéro 99 fournit

$$R_1 = 0$$

ce qui prouve la divisibilité de N par D.

102. Théorème iv. *Pour un diviseur donné, le résidu de la différence de deux nombres est égal à la différence des résidus de ces nombres.*

Démonstration. Soit D le diviseur et A,B,C les nombres entre lesquels

$$A = B - C$$

soient R, R′, R″, les résidus respectifs de A,B,C ; nous aurons

$$\dot{D} + R = \dot{D} + R' - [\dot{D} + R'']$$

ou

$$\dot{D} + R = \dot{D} + R' - R'' \qquad (2)$$

Trois cas sont à considérer :

1er cas. Si $R' > R''$, on a immédiatement

$$R = R' - R'' \qquad (c.q.d f.)$$

2e CAS. Si $R' < R''$, comme la soustraction $R' - R''$ est *numériquement* impossible, on enlève une fois D à $\dot{D}$, et l'on obtient

$$\dot{D} + R = \dot{D} + D + R' - R'' \qquad (3)$$

Or, $R'' < D$, il s'en suit

$$R' + R'' < D + R', \quad \text{et} \quad R' < D + R' - R''$$

L'expression (3) d'où l'on déduit

$$R = D + R' - R''$$

et dans laquelle on doit considérer $D + R'$ comme résidu de B, établit la proposition.

3e CAS. Si $R' = R''$, l'égalité (2) donne $R = 0$, ce qui signifie que A est multiple de D, et que (*c.q.f.d.*)

103. COROLLAIRE I. *Si les résidus de deux nombres par un diviseur donné sont égaux, la différence de ces nombres est multiple de ce diviseur*. Exemple :

$$39 = \dot{7} + 4$$

$$60 = \dot{7} + 4$$

d'où 21 ou $60 - 39 = \dot{7}$

104. COROLLAIRE II. Réciproquement, *si la différence de deux nombres est divisible par un troisième, ces deux nombres donnent par ce troisième des résidus égaux.*

Démonstration. Dans l'expression (2) du numéro 102, si l'on pose $R = 0$, il viendra

$$R' = R'' \qquad (c.q.f.d.)$$

105. COROLLAIRE III. *Tout diviseur de deux nombres divise leur différence.*

Car dans ce cas $R' = R''$, et par suite $R = 0$ (*c.q.f.d.*)

106. *Remarque* Dans $A = B - C$ le diminuende et le diminueur pourraient être complexes, c'est-à-dire composés chacun d'un plus ou moins grand nombre de parties : le théorème et ses conséquences seraient toujours vraies, seulement R' et R'' seraient les résidus des *sommes des résidus partie's* du diminuende et du diminueur.

107. Théorème v. *Un nombre est divisible par 2 lorsque son chiffre d'unité est* 0, 2, 4, 6, ou 8.

Démonstration. Soit le nombre 768. que nous décomposons comme suit en un nombre de dizaines, plus son chiffre d'unité

$$768 = 760 + 8$$

2 divisant 10 divise 760 qui est un multiple de 10 ; donc si 2 divise la seconde partie de la décomposition, le nombre entier proposé sera divisible par 2; et comme les multiples de 2 n'ayant qu'un seul chiffre sont 0, 2, 4, 6, 8, la proposition est établie.

108. Un nombre est *pair* ou *impair* lorsqu'il est ou non multiple de 2.

109. Pour le caractère de divisibilité par 5 on raisonnerait comme pour celui relatif à 2, et l'on trouverait :

Pour qu'un nombre soit divisible par 5, *il faut et il suffit que le chiffre d'unités soit* 0 *ou* 5.

110. Théorème vi. *Le résidu d'un nombre par* 4 *ou par* 25 *est le même que celui de la première tranche à droite de deux chiffres par les mêmes diviseurs.*

Démonstration. Soit le nombre 2347 ; en le décomposant en un nombre de centaines, augmenté de sa première tranche à droite de deux chiffres, on aura :

$$2347 = 2300 + 47.$$

Mais (99) le résidu de 2347 par 4 ou par 25 est égal à la somme des résidus des deux parties 2300 et 47 ; d'ailleurs, puisque $4 \cdot 25 = 100$, et qu'ainsi 100 est multiple de 4 et de 25, il est clair (96) qu'un nombre quelconque de centaines est divisible par 4 et par 25 ; donc le résidu de 2300 par 4 et par 25 est nul, ce qui prouve que les résidus de 2347 et de 47 sont égaux.

111. Corollaire i. *Un nombre est divisible par 4 lorsque sa première tranche à droite de deux chiffres est divisible par 4.*

112. Corollaire ii. *Un nombre est divisible par 25 lorsque sa première tranche à droite de deux chiffres est* 00, 25, 50 *ou* 75.

En effet, parmi les multiples de 25,

00, 25, 50 et 75

sont les seuls qui n'aient que deux chiffres.

113. Théorème vii. *Le résidu d'un nombre par 8 ou par 125 est le même que celui de son groupe d'unités par les mêmes diviseurs.*

Démonstration. Soit le nombre 23456, que nous décomposons en un nombre de mille augmenté de son groupe d'unités,

$$23456 = 23000 + 456$$

D'après le principe rappelé précédemment, comme 1000 est le produit de 8 par 125, il est clair que 23000 est divisible par 8 et par 125, et qu'ainsi ces résidus de 23456 et de 456 sont égaux.

114. Corollaire i. *Un nombre est divisible par 8 lorsque son groupe d'unités est multiple de 8.*

115. Corollaire ii. *Un nombre est divisible par 125 lorsque son groupe d'unités est* 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.

En effet, parmi les multiples de 125, ceux-là sont les seuls qui n'ont que trois chiffres

116. *Remarque.* Comme $10 = 2 \cdot 5$, et que $10^n = 2^n \cdot 5^n$ on pourrait, par un raisonnement analogue à celui employé pour 2 et 5, 4 et 25, 8 et 125, trouver des caractères de divisibilité pour 2^4 et 5^4, ou 16 et 625 ; pour 2^5 et 5^5 ou 32 et 3125, etc.

117. Théorème viii. *Un nombre étant donné, supprimez-en le chiffre de droite ; du nombre résultant retranchez le double de ce chiffre ; continuez ainsi à retrancher d'un reste, dont le chiffre de droite a été supprimé, le double de celui-ci ; si l'un des nombres obtenus est nul ou multiple de 7, le nombre proposé est divisible par 7.*

Démonstration. Par les tableaux suivants, indiquons parallèlement les dispositifs de l'opération et de la démonstration pour le nombre 6894328 proposé :

A	B
6894328	6894328
16	168
689416	6894160
12	1260
68929	6892900
18	18900
6874	6874000
8	84000
679	6790000
18	1890000
49	4900000

Au dispositif A nous substituons celui B où le chiffre de droite de chaque reste est maintenu dans le diminueur de ce reste, considéré comme diminuende.

Remarquons que les différents diminueurs de B sont

$$168,\ 126 \cdot 10,\ 189 \cdot 100,\ 84 \cdot 1000,\ 189 \cdot 10000$$

et que leurs facteurs 168, 126, 189, 84 et 189 sont obtenus en écrivant à la gauche d'un chiffre le double de cette caractéristique ; ces derniers facteurs sont donc des multiples de 21. En effet, si c désigne un chiffre quelconque, l'un de ces facteurs est de la forme numérique.

$$2c,\ c$$

dans laquelle $2c$ exprime un nombre de dizaines, et par suite dont la valeur est

$$20c + c \text{ ou } 21 \cdot c$$

Les différents diminueurs de B sont donc des multiples de 7, et si le nombre proposé est divisible par 7, on devra obtenir, en opérant comme la règle le prescrit, *zéro* ou un multiple de 7.

On arrêtera les opérations de A, lorsque l'on parviendra à un reste multiple ou non de 7.

118. Théorème ix. *Une unité numérative quelconque est égale à un multiple de* 9, *augmenté de* 1.

Démonstration. Soit l'unité numérative 100000; en en soustrayant 1, le nombre résultant n'est formé que de chiffres 9, et est par conséquent divisible par 9. D'où l'on voit que

$$100000 = 9 + 1.$$

119. Corollaire i. *Un nombre élémentaire quelconque est égal à un multiple de* 9, *augmenté de sa caractéristique.*

Démonstration. Soit en effet 400000 ; on vient de voir que 100000 est supérieur de 1 à $\dot{9}$, donc

$$400000 = 100000 \cdot 4 = (\dot{9} + 1)\,4 = \dot{9} + 4 \quad (c.\,q.\,f.\,d.)$$

120. Corollaire ii. *Tout nombre est égal à un multiple de 9 augmenté de la somme de ses chiffres.*

Démonstration. Soit le nombre 67452 ; d'après le corollaire précédent on pourra décomposer chacun des divers nombres élémentaires en un multiple de 9 augmenté de sa figure, et l'on aura dès lors en réunissant ces diverses décompositions :

$$67452 = \dot{9} + (6 + 7 + 4 + 5 + 2) \qquad (c.q.f.d.)$$

121. Corollaire iii. *Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit multiple de 9.*

Démonstration. Cela devient évident comme déduction immédiate du corollaire précédent. De plus si un nombre n'est pas divisible par 9 :

Le reste de la division d'un nombre par 9 est le même que celui de la somme de ses chiffres par le même diviseur.

122. Comme 9 est un multiple de 3, on peut dire immédiatement par les numéros 118, 119, 120, 121 :

Une unité numérative quelconque est égale à un multiple de 3, augmenté de 1.

Un nombre élémentaire quelconque est égal à un multiple de 3, augmenté de sa caractéristique.

Tout nombre est égal à un multiple de 3 augmenté de la somme de ses chiffres.

Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit multiple de 3.

Le résidu d'un nombre par 3 est le même que celui de la somme de ses chiffres par le même diviseur.

123. Théorème x. *Une unité numérative quelconque est supérieure ou inférieure de 1 à un multiple de 11, selon qu'elle est de rang impair ou pair.*

Démonstration. Les unités numératives deviennent consécutivement de 100 en 100 fois plus grandes, quand on considère spécialement celles qui sont d'ordre pair ou celles qui sont d'ordre impair; ainsi

10, 1000, 100000, 10000000, etc.

sont les unités successives d'ordre pair, et

1, 100, 10000, 1000000, 100000000, etc.

sont les unités successives d'ordre impair.

1° Parlons d'abord des unités d'ordre impair, ayant à leur droite un nombre pair de zéros, et divisons par 11 une unité quelconque de cette espèce,

```
1000000000 | 11
 100       | 909090909
   100
     100
       100
         1
```

En séparant 100 sur la gauche du dividende, on obtiendra par la division un premier reste 1 à la droite duquel pour continuer l'opération il faudra abaisser la tranche suivante de deux zéros ; un second reste 1 sera fourni de la même manière que le premier ; on aurait aussi un pour 3e, 4e, reste. On voit donc que si l'on arrête l'opération à une tranche déterminée de deux zéros, l'*unité numérative* à laquelle répond

le reste 1 correspondant *est supérieure de 1 à un multiple de* 11.

2° Si pour considérer les unités d'ordre *pair* ayant à leur droite un nombre *impair* de zéros, nous arrêtions la division précédente au moment où le premier zéro de l'une quelconque des tranches est abaissée, *le reste serait* 10 ; par suite puisqu'il ne manque qu'*une* unité du dividende pour donner un reste nul, il est démontré que *l'unité numérative correspondante est inférieure de 1 à un multiple de* 11. (*c. q. f. d.*)

124. Corollaire i. *Un nombre élémentaire quelconque est égal à un multiple de* 11 *augmenté ou diminué de sa caractéristique, selon que son unité est d'ordre impair ou pair.*

Soit 600000; on vient de voir que

$$100000 = \dot{\overline{11}} - 1$$

Donc

$$600000 = 100000 \cdot 6 = (\dot{\overline{11}} - 1)\ 6 = \dot{\overline{11}} - 6$$

Si l'on avait le nombre 4000000, il viendrait

$$40000000 = 10000000 \cdot 4 = (\dot{\overline{11}} + 1)\ 4 = \dot{\overline{11}} + 4 \quad (c.q.f.d.)$$

125. Corollaire ii. *Tout nombre est égal à un multiple de* 11 *augmenté de la somme de ses chiffres de rang impair, à partir de la droite, et diminué de la somme de ses chiffres de rang pair.*

Soit le nombre 7958368 que nous décomposons en ses divers nombres élémentaires, décomposés ensuite eux-mêmes en des multiples de 11 plus ou moins leurs caractéristiques, selon qu'ils sont d'ordre impair ou pair. On aura :

$$7958368 = \left\{ \begin{array}{rl} 7000000 = \dot{\overline{11}} + 7 & \\ 900000 = \dot{\overline{11}} & - 9 \\ 50000 = \dot{\overline{11}} + 5 & \\ 8000 = \dot{\overline{11}} & - 8 \\ 300 = \dot{\overline{11}} + 3 & \\ 60 = \dot{\overline{11}} & - 6 \\ 8 = \dot{\overline{11}} + 8 & \end{array} \right.$$

D'où par recomposition additive:

$7958368 = 11 + (8 + 3 + 5 + 7) - (6 + 8 + 9)$ (*c.q.f.d.*)

126. Corollaire iii. *Le résidu d'un nombre par* 11 *est le même que celui, par* 11, *de l'excès de la somme des chiffres de rang impair, (à partir de la droite), sur la somme des chiffres de rang pair.*

L'égalité précédente met en évidence cette proposition et la suivante qui est le caractère usuel de divisibilité par 11.

127. Corollaire iv. *Pour qu'un nombre soit divisible par* 11 *il faut et il suffit que la somme des chiffres de rang pair soit égale à la somme des chiffres de rang impair, ou bien que l'excès de l'une de ces sommes sur l'autre soit multiple de* 11.

Remarquons que si la somme des chiffres de rang impair est plus petite que celle des chiffres de rang pair, on ajoutera 11, ou un multiple de 11, à la première somme ; cette addition est possible par suite d'un emprunt équivalent fait au $\dot{\overline{11}}$ contenu dans la décomposition (125).

128. Théorème xi. *La différence de deux nombres composés des mêmes chiffres est divisible par* 9.

Démonstration. Soit s la somme des chiffres d'un nombre N, et soit N' un autre nombre composé des mêmes chiffres. On a vu (120), que

$$N = \dot{9} + s$$

$$N' = \dot{9} + s$$

Retranchant membre à membre ces deux égalités on obtient

$$N - N' = \dot{9} \qquad (c. q. f. d.)$$

129. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur les caractères de divisibilité, attendu qu'une théorie complète pour un système quelconque de numération sera bientôt exposée : les caractères relatifs au système décimal se déduiront alors immédiatement et avec simplicité de la théorie, et l'on aura en outre l'avantage d'en découvrir beaucoup d'autres, dont il serait fort inutile et beaucoup trop long de donner ici les démonstrations détachées et particulières. — Nous avons dû pour la théorie précédente des caractères de divisibilité, satisfaire au programme des classes inférieures.

130. On nomme *plus grand commun diviseur* de deux ou de plusieurs nombres le plus grand nombre qui les divise à la fois.

La recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres repose sur les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME XI. *Si deux nombres sont divisibles l'un par l'autre, leur plus grand commun diviseur est égal au plus petit d'entr'eux.*

Démonstration. Le plus petit nombre est un *diviseur commun de deux nombres* puisqu'il divise le grand, d'après la question, et qu'il se divise lui-même ; de plus il est leur *plus grand commun diviseur*, puisque le plus grand commun

diviseur devant diviser le plus petit ne peut pas le surpasser.

Théorème xii. *Si deux nombres ne sont pas divisibles l'un par l'autre, leur plus grand commun diviseur est le même que celui du plus petit d'entr'eux et du reste de leur division.*

Démonstration. Soient les nombres A et B, A étant plus grand que B ; en divisant A par B, on obtient un quotient Q et un reste R, et la définition de la division a appris que

$$A = B \cdot Q + R, \textit{ ou } R = A - BQ$$

Représentant par D et F les plus grands communs diviseurs respectifs entre A et B, et entre B et R, il s'agit de prouver que

$$D = F$$

Remarquons en premier lieu que D, divisant B, divise B Q qui est un multiple de B ; qu'ainsi B étant diviseur des nombres A et B Q est diviseur de la différence R de ces nombres : D est donc un *diviseur commun de* B *et de* R, dont F est le plus grand commun diviseur ; et l'on en déduit que

D *est contenu dans* F (1)

Ce qui signifie que, quelle que soit sa valeur, D ne peut être plus grand que F.

En second lieu, puisque F divise B, il divise aussi B Q ; donc F, divisant les nombres R et B Q, divise leur somme A.

F est ainsi un diviseur commun de A et B, et à tel titre il est permis d'affirmer que

F *est contenu dans* D, (2)

c'est-à-dire que F n'est pas plus grand que D. — Si nous considérons simultanément, comme cela doit être, les conséquences (1) et (2), il en résulte que *les deux nombres* D *et* F *étant contenus l'un dans l'autre*, sont nécessairement égaux.

c. q. f. d.)

131. *Recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres.*

Puisque le plus grand commun diviseur des nombres A et B est le même que celui des nombres B et R, respectivement plus petits que les deux premiers, il paraît plus simple de rechercher le plus grand commun diviseur des nombres B et R, et l'on est ainsi amené à diviser B par R ; cette division donne un nouveau reste R', dont le plus grand commun diviseur avec R est le même que celui de B et R, et est par conséquent égal au nombre cherché.

Pour une raison semblable, on divisera encore R par R', on obtiendra un nouveau reste R'', et ainsi de suite en divisant toujours par le dernier reste ainsi obtenu, le reste précédent, on formera la série décroissante de nombres entiers.

$$A,\ B,\ R,\ R',\ R'', \qquad D\ \ 0$$

Cette suite de nombres est *décroissante* puisque chaque reste sert de diviseur pour fournir le reste suivant : il est donc évident, en raison de cette décroissance, que l'on arrivera à un reste *nul*, qui limite ou arrête la série.

Le diviseur qui donne 0 pour reste peut être 1 ou un nombre entier quelconque D ; s'il est 1, les deux nombres A et B n'ayant alors que 1 pour plus grand commun diviseur, sont *premiers entr'eux* ; s'il est D, *le nombre* D *est le plus grand commun diviseur cherché.*

132. *Remarque.* La série des restes de l'opération qui nous occupe donne lieu à cette observation :

Le plus grand commun diviseur de deux restes consécutifs quelconques est le même que celui des nombres proposés.

D'où il suit que si l'on s'aperçoit, dans le cours des divisions, que *deux restes consécutifs sont premiers entr'eux*, on est en droit de déclarer immédiatement que les nombres donnés A et B sont aussi premiers entr'eux.

D'autre part, si l'on arrive à deux restes consécutifs dont le plus grand commun diviseur D est connu, on peut se dispenser d'achever l'opération, et l'on est autorisé à reconnaître D pour plus grand commun diviseur cherché.

De la théorie qui précède on déduit cette règle :

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit ; si le reste de cette division est nul, le plus petit nombre est le plus grand commun diviseur cherché ; si ce reste n'est pas nul, on divise le plus petit nombre par ce premier reste, et l'on obtient ainsi un deuxième reste ; on divise le second reste par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on trouve un reste nul, dont le diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.

On dispose le calcul comme suit :

	Q	Q'	Q''	Q'''
A	B	R	R'	R''
R	R'	R''	R'''	

C'est-à-dire que chaque division est disposée à la manière ordinaire, avec la seule différence que le quotient est placé *au-dessus* du diviseur. Ainsi le plus grand commun diviseur des nombres 348 et 96 donne lieu au tableau

	3	1	1	1	2
348	96	60	36	24	12
60	36	24	12	0	

133. Corollaire. *Tout commun diviseur de deux nombres divise leur plus grand commun diviseur.*

Soit f une partie aliquote commune aux deux nombres A et B qui ont donné

$$A = BQ + R$$

Et la suite décroissante

$$A,\ B,\ R,\ R',\ R'',\ldots \qquad D,\ 0$$



De la même manière que l'on a démontré que D divise

R, R', R'' .... D, on prouvera que f est sous-multiple des restes de cette série, et en particulier de D.

(*c. q. f. d.*)

On déduit de là que :

Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le PRODUIT *de tous leurs facteurs communs à ces nombres.*

134. Actuellement proposons-nous de *déterminer le plus grand commun diviseur* D *de plusieurs nombres donnés* P, Q, S, T.

A cet effet, si d représente le plus grand commun diviseur de P et Q, d sera multiple, comme nous venons de le prouver, de tous les diviseurs communs à P et R; donc chaque diviseur de S qui le serait aussi de P et de Q doit diviser le nombre d : on en conclut que le plus grand commun diviseur d' entre d et S contiendra tous les facteurs communs aux trois nombres P, Q et S.

Enfin tout diviseur de T, qui le serait en même temps de P, Q et S, devrait pour cette raison être facteur de d' ; donc en cherchant le plus grand commun diviseur D entre d' et T, nous obtiendrons celui des nombres donnés.

De là on formule cette règle :

Pour avoir le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on cherche le plus grand commun diviseur des deux premiers; puis le plus grand commun diviseur du nombre ainsi obtenu et du troisième des nombres proposés: et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les nombres aient été employés. Le dernier plus grand commun diviseur est celui des nombres proposés.

Il n'est pas inutile pour la pratique de remarquer que

Tout commun diviseur de plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur; cela ressort du raisonnement dont la règle est la conséquence.

135. Théorème xii. *Lorsqu'on multiplie deux ou plusieurs nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce nombre.*

Démonstration. Considérons d'abord les deux nombres A et B qui donnent lieu. par division, à la série suivante d'égalités dont les éléments sont suffisamment définis par ce qui précède :

$$A = B\,Q + R$$
$$B = R\,Q' + R'$$
$$R = R'\,Q'' + R''$$
$$R' = R''\,Q''' + R'''$$
$$\text{»} \qquad \text{»}$$

Soit N le nombre introduit comme facteur dans les deux nombres A et B ; multipliant ces diverses égalités par N, nous aurons :

$$A\,N = B\,N \cdot Q + R\,N$$
$$B\,N = R\,N \cdot Q' + R'\,N$$
$$R\,N = R'\,N \cdot Q'' + R''\,M$$
$$R'\,N = R''\,N \,.\, B''' + R'''\,M$$
$$\text{»} \qquad \text{»}$$

Cette dernière suite d'égalités montre que les divers restes de la série.

$$R,\ R',\ R'' \ldots\ldots \qquad D$$

des restes, ont été multipliés par N, et qu'ainsi D, dernier terme de cette série, est aussi multiplié par N.

Un raisonnement analogue se ferait si l'on avait divisé A et B par un même nombre K, et l'on trouverait que le plus grand commun diviseur D est devenu



$$\frac{D}{K}$$

Ce que nous venons de dire étant évidemment général, le

théorème est établi et s'étend facilement à plusieurs nombres; il montre aussi que :

Si l'on divise deux ou plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur, le plus grand commun diviseur est divisé par lui-même et devient l'unité.

Car il suffit dans la démonstration précédente de faire $K = D$; les nombres déduits de ceux qui ont été proposés sont alors *premiers entr'eux.*

136. Soient actuellement A et B les quotients de deux nombres donnés par leur plus grand commun diviseur, dont la détermination exigerait (135) le même nombre de divisions que celle du plus grand commun diviseur D des nombres premiers A et B ; puisqu'ainsi $D = 1$, représentons par

$$B \ldots\ldots \quad R_5,\ R_4,\ R_3,\ R_2,\ 1$$

les diviseurs successifs conduisant au plus grand commun diviseur 1.

Considérons trois diviseurs successifs quelconques

$$R_{n+2},\quad R_{n+1},\quad R_n$$

Soit q le quotient pour lequel on a :

$$R_{n+2} = q \cdot R_{n+1} + R_n \qquad 1)$$

Examinons spécialement le cas de

$$R_n > \tfrac{1}{2} R_{n+1}$$

c'est-à-dire *le cas où le reste est plus grand que la moitié du diviseur correspondant. En ajoutant* R_{n+1} *aux deux membres de l'égalité* (1) *on obtient :*

$$R_{n+2} + R_{n+1} = (q+1)\, R_{n+1} + R_n$$



D'où

$$(q+1)\,R_{n+1} - R_{n+2} = R_{n+1} - R_n \qquad (2)$$

Ce qui montre que *dans le cas qui nous occupe*, si l'on ajoute une unité au quotient pour soustraire le dividende R_{n+2} du produit du diviseur par le quotient ainsi augmenté, on est conduit à un reste

$$R_{n+1} - R_n$$

qui est *le complément du reste obtenu au diviseur, et qui est évidemment alors plus petit que la moitié du diviseur.*

Il est donc clair qu'en opérant comme nous venons de l'indiquer, *chaque fois que* $R_n > \frac{1}{2} R_{n+1}$, on *diminuera* le nombre des divisions à faire. puisque l'on force les restes à diminuer plus rapidement.

137. Théorème xiii. *Dans une division le dividende est plus grand que le double du reste.*

Démonstration. Soit A le dividende, B le diviseur, Q le quotient, et R le reste ; on a

$$A = B \, . \, Q + R$$

Comme Q (partie entière du quotient), est au moins égal à 1, on a

$$A > B + R$$

D'ailleurs B > R, d'où *a fortiori* :

$$A > 2\,R \qquad (c.\,q.\,f.\,d.)$$

138 Corollaire. *Le plus grand nombre de divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres est double de l'exposant de la puissance de 2 immédiatement supérieure au plus petit de ces nombres*

En effet si R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, etc. sont les restes successifs par rapport aux nombres A et B, on a

$$R_2 < \frac{B}{2}$$
$$R_4 < \frac{R_2}{2}$$
$$R_6 < \frac{R_4}{2}$$
$$R_8 < \frac{R_6}{2}$$
$$\text{»} \qquad \text{»}$$
$$R_{2n} < \frac{R_{2n-2}}{2}$$

Multipliant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$R_{2n} < \frac{B}{2^n}$$

Donc B est plus grand que le produit de la n^{me} puissance de 2 par le reste qui occupe le rang $2n$; mais nous supposons que ce reste n'est pas nul, que par suite il est au moins égal à 1; d'où l'on voit qu'en cherchant la puissance de 2 immédiatement supérieure à B, *le double du degré de cette puissance sera la limite supérieure du nombre des divisions à exécuter dans le calcul du plus grand commun diviseur de deux nombres.*

139. Théorème de M. Lamé. *Le nombre des divisions à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres ne peut surpasser le quintuple du nombre des chiffres du plus petit nombre.*

Démonstration. Les notations et données étant les mêmes que dans le paragraphe précédent, on a

$$R_2 \geqq 2$$
$$R_3 \geqq 3$$
$$R_4 \geqq 5$$
$$R_5 \geqq 8$$
$$R_6 \geqq 13$$
$$R_7 \geqq 21$$

Donc *a fortiori :*

$$R_6 > 10$$
$$R_7 > 10 \cdot 2$$

De ces deux dernières inégalités et en vertu de la relation générale

$$R_{n+2} > R_{n+1} + R_n$$

On conclut

$$R_8 > 10 \cdot 3$$
$$R_9 > 10 \cdot 5$$
$$R_{10} > 10 \cdot 8$$
$$R_{11} > 10 \cdot 13$$
$$R_{12} > 10 \cdot 21$$

A plus forte raison

$$R_{11} > 10^2$$
$$R_{12} > 10^2 \cdot 2$$

On prouverait de même que

$$R_{16} > 10^3$$
$$R_{17} > 10^3 \cdot 2$$

et ainsi de suite, c'est-à-dire que généralement l'on a :

$$R_{5n+1} > 10^n$$

Or 10^n contient $n + 1$ chiffres; donc si l'on fait $5n + 1$ divisions, en partant de B pour arriver à $D = 1$, il faut que

$$B > 10^n \qquad (c.\ q.\ f.\ d.)$$

140. Voici une limite plus simple que celle de Lamé, et remarquable par l'élégance de sa démonstration.

THÉORÈME DE M. LIONNET. *Le nombre des divisions à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur ne peut surpasser le triple du nombre des chiffres du plus petit des deux nombres.*

Démonstration. Conservons les mêmes notations, et considérons les diviseurs qui satisfont à la condition

$$R_{n+1} > 2 R_n \qquad (3)$$

On a

$$R_{n+2} = q R_{n+1} + R_n$$

La soustraction membre à membre de ces relations donne :

$$R_{n+2} - R_{n+1} < q R_{n+1} - R_n$$

Et par suite

$$\frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_{n+1}} < q \qquad (4)$$

Or en changeant n en $n+1$ dans (3) on voit que

$$R_{n+2} - R_{n+2} > R_{n+1}$$

et par conséquent en vertu de (4) que

$$q > 1$$

Ce qui signifie, puisque q est un nombre entier que

$$q \geqq 2$$

On voit que

$$R_{n+2} \geqq 2 R_{n+1} + R_n \qquad (5)$$

Considérons en second lieu les divisions pour lesquelles

$$R_{n+1} < 2 R_n$$

Soustrayant cette inégalité de l'expression

$$R_{n+2} = q\,R_{n+1} + R_n$$

nous obtenons

$$R_{n+2} - R_{n+1} > q\,R_{n+1} - R_n$$

Et

$$R_{n+2} > (q+1)\,R_{n+1} - R_n$$

Mais $q \geqq 2$, donc

$$R_{n+2} \geqq 3\,R_{n+1} - R_n \qquad (6)$$

Posons

$$\alpha = R_{n+1} - 2\,R_n \qquad (7)$$

Et l'on aura

$$2\,R_{n+1} + R_n = \alpha + R_{n+1} + 3\,R_n$$

Puis en remplaçant R_{n+1} par sa valeur tirée de (7) :

$$2\,R_{n+1} + R_n = 2\,\alpha + 5\,R_n \qquad (8)$$

De même

$$3\,R_{n+1} - R_n = \alpha + 2\,R_{n+1} + R_n$$

et

$$3\,R_{n+1} - R_n = 3\,\alpha + 5\,R_n \qquad (9)$$

Des relations (5), et (6) mises en rapport avec (8) et (9) on conclut que quel que soit le mode de division, on aura toujours :

$$R_{n\,2} \geqq 2\,R_{n+1} + R_n$$

Mais R_2 est au moins égal à 2, donc

$$R_3 \geqq 5$$

$$R_4 > 12$$

$$R_5 \geqq 29$$

D'où, à plus forte raison,

$$R_4 > 10$$

$$R_5 > 10 \cdot 2 \qquad (c.\ q.\ f.\ d.)$$

En continuant dès lors la démonstration, comme cela a été fait dans le théorème de M. Lamé, on aurait d'une manière analogue

$$R_{3n+1} > 10^n$$

141. Théorème xiv. *Tout nombre qui divise le produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Démonstration. Soient les deux facteurs A et B, dont A est premier avec un diviseur donné K ; il s'en suit que les nombres K et A ayant 1 pour plus grand commun diviseur, en les multipliant par B, les produits

K B et A B

auront B *pour plus grand commun diviseur ;* or K divise le produit A B, et évidemment celui K B ; donc K *est facteur du plus grand commun diviseur* B *de ces produits* K B *et* A B, c'est-à-dire que K divise B

(c. q. f. d.)

142. Deux ou plusieurs nombres étant donnés, on peut se proposer de trouver *leur plus petit commun multiple*, c'est-à-



dire *le nombre le plus petit possible, divisible par chacun d'eux.*

Théorème xv. *Le moindre multiple de deux nombres est égal au produit de leur plus grand commun diviseur par les quotients de chacun de ces nombres par ce plus grand commun diviseur.*

Démonstration. Soient A et B les deux nombres proposés dont D est le plus grand commun diviseur, et pour lesquels on a :

$$A = D \cdot Q$$
$$B = D \cdot Q'$$

Comme D est multiple de tous les diviseurs communs entre A et B, il est clair que Q *et* Q' *sont premiers entr'eux* et que D est premier avec Q et Q' : tout multiple des nombres A et B devra donc contenir les facteurs D, Q et Q' et pour être le *moindre multiple* il ne devra les contenir qu'une seule fois, ce qui donne pour ce plus petit multiple,

$$D \cdot Q \cdot Q \qquad (c.q.f.d.)$$

143. Les communs multiples de deux nombres donnés sont les multiples de leur moindre multiple.

144. Théorème xvi. *Pour avoir le moindre multiple de plusieurs nombres, on cherche le moindre multiple des deux premiers; puis celui du nombre ainsi obtenu et du troisième des nombres proposés; et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les nombres aient été employés. Le dernier moindre multiple ainsi obtenu est celui des nombres proposés.*

Démonstration. Soient les nombres

$$P, Q, S, T.$$

et m le moindre multiple des deux premiers P et Q. En



cherchant le plus petit commun multiple *m'* des nombres *m* et S, on aura le plus petit nombre divisible par S et par *m* c'est-à-dire par S et par P et Q ; enfin en déterminant le multiple **M** le plus petit possible de *m'* et T, on aura le plus petit des multiples des nombres proposés P, Q, S et T.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

La suite des nombres premiers est illimitée.—Criterium d'un nombre premier. — Formation d'une table de nombres premiers ; abréviation. — Théorèmes relatifs à la théorie des nombres premiers.- Remarque sur la divisibilité, lorsque les diviseurs ne sont pas des nombres premiers. — Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers ; règle. — Condition générale pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre. — Formation de la table des diviseurs, tant simples que composés d'un nombre. — Formules du nombre et de la somme de tous ces diviseurs. — Recherche des diviseurs communs à plusieurs nombres. Composition du plus grand commun diviseur et du moindre multiple commun de plusieurs nombres. — Forme générale des nombres impairs et des nombres premiers par rapport à 6 et à 8.

145. Théorème i. *Tout nombre entier qui n'est pas premier admet au moins un diviseur premier.*

Démonstration. Soit N le nombre donné et K son diviseur ; si K est premier le théorème est démontré, mais si K n'est pas tel, c'est qu'il admet un diviseur K' ; si K' est premier la proposition est établie, mais dans le cas contraire c'est que K' a un sous-multiple K'' ; et ainsi de suite.

On a donc en général, en désignant par p un nombre $K^{(n)}$ n'admettant pas d'autre diviseur que 1 :

$$N = \dot{K}$$

$$K = \dot{K'}$$

$$K' = \dot{K''}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$K^{(n)} = \dot{p}$$

Les diviseurs entiers K, K′, K″. . . $K^{(n)}$ vont en diminuant et sont donc un nombre limité; multipliant ces égalités, membre à membre, il viendra :

$$N = \dot{p}$$

Le nombre N admet donc le diviseur premier p.

146. Corollaire. *Deux nombres, non premiers entr'eux, admettent au moins un diviseur premier commun.*

Démonstration. Soient les nombres A et B dont le plus grand commun diviseur supposé et donné est D ; *si* D *n'est pas premier* il admet au moins un diviseur premier p, d'où

$$D = \dot{p}$$

Or

$$A = \dot{D} \text{ et } B = \dot{D}$$

Donc

$$A = \dot{p} \text{ et } B = \dot{p} \qquad \textit{c. q. f. d.}$$

Si D était premier, la proposition serait évidente puisque les nombres proposés sont multiples de leur plus grand commun diviseur.

147. Théorème ii. *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Démonstration. Soit, s'il est possible, n un nombre premier *limité* ou plus grand que tout autre nombre premier. Représentons par N le produit de tous les nombres premiers à partir de 1 jusqu'à n inclusivement.

Le nombre $N + 1$, supérieur d'une unité au produit N, est ou n'est pas premier : nous n'avons à examiner que ce dernier cas, puisque si $N + 1$ était premier, cela signifierait qu'il existe un nombre premier $N + 1$ plus grand que n.

Si $N + 1$ n'est pas premier, il admet un diviseur premier ; et il est clair que ce diviseur sera plus grand que n, puisque tout nombre premier inférieur à n est facteur de N et ne peut par suite l'être aussi de $N + 1$.

Il existe donc un nombre premier supérieur à N. (*c.q.f.d.*)

148. Théorème iii. *Un nombre est premier lorsqu'il n'a pour diviseur aucun des nombres premiers dont les carrés ne le surpassent pas.*

Démonstration. Soit R la racine carrée d'un nombre N, et admettons que l'on considère en général N comme étant le produit de deux facteurs A et B ; on aura donc

$$R^2 = N = AB,$$

Egalité qui prouve que, si B est plus petit que R, A est plus grand que cette même racine R : donc si aucun nombre inférieur à $\sqrt{N}$ ne divise N, aucun nombre plus grand que $\sqrt{N}$ ne sera sous-multiple de N.

C'est-à-dire que si N n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers dont les carrés ne le surpassent pas, il n'admet non plus aucun autre diviseur ; N *est alors premier.* (*c.q.f.d.*)

149. Donnons le caractère des épreuves pratiques auxquelles donne lieu le théorème. Supposons que l'on divise un

nombre N par les nombres premiers 2, 3, 5, 7 . . . . , et soit Q le quotient complet pour l'un quelconque de ces diviseurs ; on aura

$$Q = \frac{N}{D}$$

Or les quotients Q décroissant à mesure que les diviseurs D augmentent, il arrivera un instant où l'*un* de ces quotients sera plus petit que son diviseur ; et comme

$$R^2 = Q \cdot D$$

on aura ainsi épuisé la série des nombres premiers moindres que R : en effet, on est arrivé au moment où

$$Q < D\text{, d'où } DQ < D^2$$

D'où encore puisque $R^2 = DQ$,

$$R^2 < D^2 \text{ et } R < D$$

On est donc maintenant, d'après cette inégalité, dans la série des nombres premiers supérieurs à R ; et l'on peut dès lors *sans s'inquiéter de la détermination de* R, énoncer la propriété suivante :

Corollaire. *Pour reconnaître si un nombre donné est premier ou non, on le divise successivement par les nombres premiers* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 . . . . ; *si aucune de ces divisions ne donne* 0 *pour reste et que l'on soit parvenu à un quotient plus petit que le diviseur premier correspondant, le nombre* N *est premier.*

Exemple. Prenons le nombre 907,

On vérifie aisément que ce nombre n'est divisible par aucun des nombres premiers

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

et que le quotient de 907 par 31 est plus petit que 31 ; on en conclut que 907 est un nombre premier.

150. *Formation d'une table de nombres premiers.*

Il est utile de savoir comment on pourrait former une table de tous les nombres premiers depuis l'unité jusqu'à une limite désignée L.

On écrit à la suite des nombres 1 et 2 tous les nombres impairs dans l'ordre naturel ascendant ; puis à partir de 3 exclusivement on *barre* de 3 en 3 les nombres de cette série, ce qui supprime les multiples de 3. — Ensuite à partir de 5 exclusivement, et en recommençant la série, on barre de 5 en 5 pour supprimer les multiples de 5.

A partir de 7, premier nombre restant après 5, on barre de nouveau de 7 en 7 tous les multiples de 7 ; et ainsi de suite.

Quand cette opération sera terminée tous les nombres de la série qui ne seront pas barrés, seront les nombres premiers demandés.

Le procédé de formation qui vient d'être indiqué porte le nom de *Crible d'Eratosthène*, du nom de son inventeur.

151. On abrége ce travail à l'aide de la remarque suivante : quand on supprime les multiples d'un certain nombre premier, de 13 par exemple, on trouve que le premier de ces multiples est 13 × 13 ; et c'est du reste ce qui était à prévoir, puisque les multiples de 13 inférieurs à ce carré ont été barrés comme multiples de nombres premiers plus petits que 13.

On en déduit donc cette règle :

Chaque fois que l'on arrive à un nombre premier n, *on calcule le carré* n^2 ; *on cherche immédiatement ce carré dans la table, on le supprime et l'on en fait de même de* n *en* n *à partir de ce carré.*

D'après cela *l'opération est terminée quand on arrive à un nombre premier* K *dont le carré dépasse la limite* L *de la table;* car pour K, le premier multiple à effacer serait K^2, et K^2 étant plus grand que L, n'est plus dans les limites de la table demandée.

152. Théorème. iv. *Tout nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs divise au moins l'un de ces facteurs.*

Démonstration. Considérons le produit

$$P = abc \ldots \; kl.$$

divisible par le nombre premier D. Nous avons établi (141) que tout nombre D qui divise le produit P des deux facteurs

$$a,\; bc \ldots kl$$

et qui est premier avec l'un des deux, *a* par exemple, divise nécessairement l'autre ; de même si D divisait le produit

$$bcd \ldots kl$$

sans diviser le facteur *b*, il faudrait que D divisât le produit

$$cd \ldots kl$$

et l'on continuerait, en raisonnant de la sorte, à trouver que l'un des facteurs de P est nécessairement multiple de D.

153. Corollaire i. *Tout nombre premier qui divise un produit de plusieurs facteurs premiers est égal à l'un d'eux.*

En effet, ce diviseur premier devant diviser l'un des facteurs *premiers* du produit, doit être égal à ce facteur.

Corollaire ii. *Un nombre ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.*

S'il existe deux modes de décomposition, la différence proviendra de la valeur des facteurs, ou du nombre de fois que chacun d'eux entre dans la formation du nombre N. Ad-

mettons donc que l'on puisse avoir, entre facteurs premiers, l'égalité

$$abcd \cdots kl = a'b'c'd' \ldots k'l'$$

Le facteur a divisant le premier produit, divise le second, et est nécessairement (153) égal à l'un d'eux ; supposons que $a = a$.

On a dès lors

$$bcd \cdots kl = b'c'd' \ldots k'l'$$

Raisonnant sur cette égalité comme sur la précédente, on trouvera $b = b'$; et ainsi de suite on verra que chaque facteur du premier mode trouve son égal dans le second. (*c.q.f.d.*)

155. Corollaire. III. *Tout nombre premier qui divise une puissance d'un nombre divise ce nombre.*

Le nombre premier D divisant N^p divise le produit N·N·N... et comme tel, il doit (152) diviser l'un quelconque des facteurs N de ce produit.

156. Corollaire. IV. *Lorsque deux nombres sont premiers entr'eux, leurs puissances sont premières entre elles.*

Considérons les puissances a^p et b^q des nombres premiers a et b ; si un nombre premier d pouvait diviser à la fois ces puissances il devrait (155) diviser individuellement a et b, ce qui ne se peut, puisque ces nombres a et b sont premiers entr'eux.

157. Corollaire V. *Tout nombre, premier avec les facteurs d'un produit, est premier avec ce produit.*

En effet, ce produit ne pourrait admettre d'autres facteurs premiers que ceux des facteurs qui le composent, sans quoi il arriverait que le même nombre admettrait plus d'un mode de décomposition en facteurs premiers; donc notre diviseur,



premier avec chacun des facteurs proposés du produit, est premier lui-même avec ce produit.

158. Corollaire vi. *Réciproquement tout nombre, premier avec un produit, l'est aussi avec chacun des facteurs de ce produit.*

Car s'il n'en était pas ainsi, si l'un des facteurs et le nombre diviseur considéré, avaient un sous-multiple commun, ce sous-multiple serait un diviseur commun entre le produit et le diviseur, ce qui est contraire aux données de la question.

159. Théorème v. *Tout nombre divisible individuellement par plusieurs nombres premiers deux à deux, est divisible par leur produit.*

Démonstration. Soit le nombre N divisible par chacun des nombres premiers a, b, c, ... k, l.

En divisant N par a, on aura Q étant un nombre entier :

$$N = a\,Q$$

Si maintenant, par b, l'on divise N ou $a\,Q$, on aura encore *zéro* pour reste; donc b, qui est premier avec a, divise l'autre facteur Q; donc Q' étant entier, il vient :

$$Q = b\,Q'$$

Et ainsi de suite on aurait

$$Q' = c\,Q''$$

.

.

.

$$Q^{(r)} = k\,.\,l$$

La dernière égalité obtenue par division est celle pour laquelle le diviseur et le quotient sont tous les deux des nom-

bres premiers. Multipliant ces diverses égalités membre à membre, on aura après simplification :

$$N = a.\ b.\ c.\ d....\ k.\ l \qquad (c.\ q.\ f.\ d.)$$

160. ***Remarque sur la divisibilité des nombres.*** Ce dernier théorème permet de déterminer les conditions de divisibilité *pour des diviseurs qui ne sont pas des nombres premiers et dont les facteurs premiers simples* ont été l'objet de caractères établis dans le chapitre 1 du livre III. C'est-à-dire, en général, qu'un nombre est divisible par le produit des facteurs premiers $a\ b\ c\ d$ lorsqu'il satisfait aux conditions de divisibilité relatives à chaque facteur pris isolément; par exemple, un nombre est divisible par 1980 lorsqu'il satisfait aux caractères de divisibilité par 4, 5, 9 et 11.

161. *La décomposition d'un nombre en facteurs premiers* a pour but de déterminer les nombres premiers qui divisent le nombre proposé, et le nombre de fois que chacun d'eux est facteur.

Du théorème V (159) il résulte immédiatement que tout nombre qui n'est pas premier est un produit de facteurs premiers ; d'ailleurs on a vu (154) qu'*un nombre ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.*

Quand cette décomposition est faite, on n'écrit qu'une seule fois chacun des facteurs égaux, en lui donnant un *exposant* égal au nombre de fois qu'il entre dans la composition. Ainsi un nombre N, admettant trois fois le facteur 4, 7 fois le facteur 5, 2 fois le facteur 11, 1 fois le facteur 13, on écrit

$$N = 4^3.\ 5^7.\ 11^2.\ 13$$

162. Indiquons maintenant comment on trouve chacun des facteurs d'une telle composition :

Ayant sous les yeux une table des nombres premiers, on divise le nombre N, autant de fois que possible par chaque



terme de cette table, jusqu'à ce qu'on arrive à un *dernier* quotient qui soit lui-même un nombre premier.

Prenons 9450 pour exemple et disons, avant tout, que le nombre donné et ses quotients successifs s'écrivent les uns en-dessous des autres en colonne verticale séparée par un trait des diviseurs que l'on donne à ces quotients. On a ainsi

9450	2
4725	3
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

Le nombre 9450 admet (107) le diviseur 2 ; le quotient est 4725, qui est (122) divisible par 3 et qui donne ainsi le quotient 1575.

1575 est encore multiple de 3, tout aussi bien que le quotient 525 qui en provient et qui conduit à 175; ce nombre 175 est (109) divisible par 5. De même 35 divisé par 5 donne 7 pour quotient; or 7, étant un nombre premier, l'opération est terminée et la formule de décomposition est

$$N = 2 . 3^3 . 5^2 . 7$$

Le procédé qui vient d'être suivi est implicitement contenu dans la démonstration du théorème V (159); et lorsque sans succès l'on a essayé les nombres premiers compris entre 1 et celui dont le quotient serait plus petit que le diviseur, on est certain que le nombre proposé n'a pas de diviseurs, et qu'il est lui-même (149) un nombre premier.

De ce qui précède on tire la règle suivante :

Pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on

essaie, par ordre de grandeur, s'il n'est divisible par aucun des nombres premiers dont les carrés ne le surpassent pas. Si aucune de ces divisions ne réussit, le nombre est premier. Si l'on trouve un quotient entier on le divise par le même nombre premier employé; et l'on continue ainsi à diviser les quotients successifs jusqu'à ce que l'on en trouve un qui ne soit plus divisible par le nombre premier qui a servi de diviseur. On opère ensuite sur le dernier quotient obtenu comme sur le nombre proposé, en observant qu'il ne peut être divisible que par des nombres premiers supérieurs au diviseur déjà employé. On continue ces calculs jusqu'à ce que l'on parvienne à un quotient qui soit premier; on le divise par lui-même, ce qui donne 1 pour quotient final. Le nombre proposé est le produit de tous les diviseurs premiers employés.

163. Théorème vi. *Pour que deux nombres soient divisibles l'un par l'autre, il faut et il suffit: 1° que chaque facteur premier du diviseur soit un des facteurs premiers du dividende; 2° que l'exposant de chaque facteur premier du diviseur ne surpasse pas l'exposant du même facteur dans le dividende.*

Démonstration. Ces conditions sont *nécessaires ;* en effet, puisque le dividende est divisible par le diviseur, le dividende est multiple de *chacun* des facteurs du diviseur; de plus si l'exposant d'un facteur dans le dividende était moindre que l'exposant du même facteur dans le diviseur, c'est-à-dire si un facteur *a* entrait *moins de fois dans le dividende que dans le diviseur*, on pourrait, sans changer le quotient primitif, diviser les deux termes de ce quotient par la puissance de *a* qui se trouve au dividende : les facteurs *a* disparaîtraient ainsi au dividende, mais persisteraient au nouveau diviseur, dont *le facteur* a *ne pourrait être ainsi sous-multiple du nouveau dividende.*

Ces mêmes conditions sont *suffisantes*, car alors le dividende, étant divisible par chacun des facteurs premiers du

diviseur, est divisible par le produit de ces mêmes facteurs, c'est-à-dire par le diviseur lui-même. *Ce théorème est un caractère général de divisibilité de deux nombres.*

164. Actuellement supposons un nombre N décomposé dans ses facteurs premiers a, b, c, d contenu respectivement p, q, r, s fois dans N, c'est-à-dire que

$$N = a^p . b^q . c^r . d^s .$$

Formons le tableau suivant

$1, a, a^2, a^3, \ldots.$	a^p
$1, b, b^2, b^3 \ldots\ldots$	b^q
$1, c, c^2, c^3 \ldots\ldots$	c^r
$1, d, d^2, d^3 \ldots\ldots$	d^s

des diviseurs premiers du nombre N et des puissances de ces diviseurs jusqu'à celles de degrés les plus élevés appartenant à N. Les différents nombres de ce tableau sont évidemment des diviseurs du nombre donné ; mais il est clair aussi qu'on aura d'autres diviseurs en formant tous les produits différents des puissances de ce tableau, multipliées 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4 sous *la condition de ne jamais prendre dans une même combinaison plus d'un facteur dans la même ligne horizontale.*

On pourra cependant prendre deux ou plusieurs puissances d'une même ligne horizontale, mais alors *il faudra que la somme de leurs degrés ne dépasse jamais le degré maximum de cette ligne*, sans quoi il n'y aurait pas de division possible : du reste en combinant de la sorte diverses puissances d'un même facteur premier, on retrouverait nécessairement l'une des combinaisons obtenues en n'employant chaque fois qu'une puissance d'une même ligne.

Le plus grand nombre de facteurs *différents* entrant dans ces combinaisons, (4 dans l'exemple choisi) est égal *au nom-*

bre total de facteurs premiers différents qui composent le nombre donné N.

Les lignes de *diviseurs puissances*, contenues dans le tableau précédent se composent respectivement de $p+1$, $q+1$, $r+1$, et $s+1$ termes. Donc si l'on multiplie les termes de la première ligne par *chacun* de ceux de la seconde, on formera

$$(p+1)\ (q+1)$$

produits différents, dont chacun sera ensuite multiplié par les divers termes de la troisième ligne ; ce qui donnera lieu à

$$(p+1)\ (q+1)\ (r+1)$$

produits qui, étant enfin combinés avec chacun des termes de la quatrième ligne, fourniront

$$(p+1)\ (q+1)\ (r+1)\ (s+1)$$

nombres différents, sous-multiples chacun du nombre N.

De là on déduit en général :

Pour trouver le nombre total des diviseurs d'un nombre, (en y comprenant ce nombre et l'unité), augmentez d'une unité l'exposant de chaque facteur premier ; le produit des nombres ainsi formés est le nombre cherché.

165. Quant à la somme, remarquons que si l'on voulait avoir celle de *tous* les diviseurs auxquels donnent lieu les facteurs a et b et leurs diverses puissances, il suffirait de faire le produit

$$(1+a+a^2+\ldots.+a^p)\ (1+b+b^2+\ldots.+b^q)$$

De même, il est clair que pour avoir la somme des diviseurs que fournissent les trois premiers, puis les quatre facteurs reconnus dans N, *il faudra effectuer le produit des som-*

mes des diverses puissances auxquelles chacun de ces facteurs entre dans le nombre proposé.

En représentant cette somme par S, et par

$$\sum_0^p a^i,\ \sum_0^q b^i,\ \sum_0^r c^i,\ \sum_0^s d^i$$

celles des diverses puissances des facteurs premiers de N nous aurons la formule

$$S = \sum_0^p a^i \cdot \sum_0^q b^i \cdot \sum_0^r c^i \cdot \sum_0^s d^i$$

A l'aide de la formule sommatoire des progressions, nous verrons que l'on donne à cette expression et à son calcul une forme *beaucoup* plus simple, dont nous ne pouvons parler ici.

166. Comme application, destinée à éclaircir la détermination du nombre total des diviseurs d'un nombre, considérons 9450 dont la décomposition a été expliquée (162). Dans la pratique on adopte le dispositif suivant :

N	D	F	
9450	1	1	
4725	2	2	L
1575	3	3. 6	
525	3	9, 18	
175	3	27. 54	L'
35	5	5, 10. 15, 30, 45, 90, 135, 270.	
7	5	25, 50, 75, 150, 225, 450, 675, 1350.	L''
1	7	7, 14, 21, 42. 63, 126, 189, 378. 35, 70, 105, 210, 315, 630, 945, 1890. 175, 350, 525, 1050, 1575, 3150, 4725, 9450.	

Les deux premières colonnes N et D à gauche contiennent les calculs nécessaires à la recherche des facteurs premiers de 9450; dans la troisième F sont inscrits les diviseurs simples et composés, et voici comment ces diviseurs sont calculés :

Sur une même ligne verticale dans F écrivons les diverses puissances des facteurs acquis dans la colonne voisine D; on obtient ainsi 1, 2. 3, 9, 27, 5, 25, 7, et imaginons, *pour la facilité de l'explication*, de séparer par des lignes horizontales les puissances des facteurs premiers différents. On aura ainsi les lignes L, L', L''; et remarquons bien que si, au paragraphe 161, nous avons disposé *horizontalement* ces puissances, elles se trouvent maintenant disposées *verticalement*, en ayant chacune 1 (écrit en tête de F) pour terme commun. Il s'en suit que pour multiplier 2 à 2, les deux premières lignes de facteurs (161), il faudra ici *successivement* multiplier les nombres de l'espace F L *à l'exception de* 1, par chacune des puissances de 3.

Pareillement pour effectuer les produits des trois premières lignes de facteurs du n° 161, on devra sans opérer sur 1, multiplier chacun des nombres contenus dans l'espace F L' par chacune des puissances de 5, contenue dans le nombre.

Enfin pour obtenir les produits des quatre lignes de facteurs du n° 161, on n'aura qu'à multiplier par 7 les diviseurs inscrits dans l'espace F L''.

On peut compter ainsi dans la colonne F, 48 diviseurs ; et c'est en effet le nombre total que l'on devait avoir, puisque

$$N = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 . 7$$

il suffira de poser $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 1$ dans la formule

$$(p + 1)\ (q + 1)\ (r + 1)\ (s + 1)$$

Quant à la somme S des 48 diviseurs obtenus, on l'obtiendrait en exécutant (162) le produit

$$S = (1+2)\ (1+3+9+27)\ (1+5+25)\ (1+7)$$

d'où

$$S = 3 \,.\, 40 \,.\, 31 \,.\, 8 = 29760$$

167. Théorème vii. *Le nombre des diviseurs d'un nombre est impair ou pair selon que ce nombre est ou n'est pas un carré.*

Démonstration. Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, si ces facteurs différents sont chacun un nombre *pair*, c'est-à-dire si p, q, r, s du nº 161, sont des nombres pairs, *ou si* N *est un carré*, les nombres

$$p+1,\ q+1,\ r+1,\ s+1$$

seront impairs; le produit de ces derniers nombres sera donc lui-même impair.

Si p, q, r, s ou même un seul de ces exposants, est *impair*, alors le produit

$$(p+1)\ (q+1)\ (r+1)\ (s+1)$$

sera pair. Dans ce cas N n'est évidemment pas un carré.

168. Théorème viii. Réciproquement, *si le nombre des diviseurs d'un nombre est impair, le nombre proposé est un carré.*

Démonstration. En effet pour que le produit $(p+1)\ (q+1)\ (r+1)\ (s+1)$ soit impair, il est indispensable que chacun de ses facteurs soit impair; par suite p, q, r, s sont des nombres pair, et N est un carré.

169. La décomposition d'un nombre en ses facteurs pre-



miers sert encore à trouver le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres, en même temps qu'elle donne la forme de ce nombre que nous avons déjà appris à trouver par une voie différente, dans le chapitre précédent

Théorème ix. *Le plus grand commun diviseur entre des nombres donnés se compose du produit de tous les facteurs premiers communs à ces nombres, et élevés chacun à la plus faible puissance accusée par les décompositions.*

Démonstration. Il est évident que les facteurs qui appartiennent à l'un des nombres donnés *sans appartenir* à chacun des autres, ne peuvent diviser ces derniers, et conséquemment ne peuvent faire partie du plus grand commun diviseur. D'autre part, un facteur premier, commun à tous les nombres, ne peut entrer dans leur plus grand commun diviseur qu'à la plus faible puissance, puisque sans cela il ne diviserait pas chacun de ces nombres.

(*c.q.f.d.*)

L'énoncé de cette propriété constitue une véritable règle très-simple et très-expéditive pour la détermination du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres donnés.

170. Nous avons vu ce que l'on entend (142) par *moindre multiple de plusieurs nombres donnés*, et comment on arrive à ce nombre à l'aide du plus grand commun diviseur des nombres proposés.

La recherche du moindre multiple est considérablement simplifiée, à l'aide du :

Théorème x. *Le moindre multiple commun de plusieurs nombres donnés est le produit de* tous *les facteurs premiers* différents *dont ces nombres se composent, et élevés chacun à la plus haute puissance accusée par les décompositions.*

Démonstration. Il est d'abord évident que les facteurs premiers, communs ou non communs aux nombres proposés,

doivent faire partie du ***plus petit commun multiple***. D'ailleurs l'un quelconque de ces facteurs doit entrer dans la composition du moindre multiple *autant de fois* AU MOINS que l'indique le plus haut exposant que possède ce facteur dans la décomposition ; sans quoi *par rapport à ce facteur* le moindre multiple ne serait pas divisible sans reste par l'un des nombres.
(*c. q. f. d.*)

171. Pour élucider ce qui vient d'être dit sur *le moyen très-court, par la décomposition en facteurs premiers*, de trouver le plus grand commun diviseur et le moindre multiple commun de plusieurs nombres donnés, résolvons ces questions pour les nombres 350, 756 et 6435 qui donnent lieu aux calculs suivants :

350	2	756	2	6435	3
175	5	378	2	2145	3
35	5	189	3	715	5
7	7	63	3	143	11
1		21	3	13	13
		7	7	1	
		1			

D'où l'on tire

$$350 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 7$$
$$756 = 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 7$$
$$6435 = 3^2 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 13$$

Et par suite

plus grand commun diviseur $= 7$.

Moindre multiple commun $= 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 = 2702700$.

Un pareil mode de calcul est infiniment plus expéditif que celui établi par la théorie exposée (chapitre I, livre III).

172. Théorème xi. *Le produit du plus grand commun diviseur et du moindre multiple de deux nombres donnés est égal au produit de ces deux nombres.*

Démonstration. En effet, dans ce moindre multiple tous les facteurs sont considérés avec le plus grand des deux exposants ; pour le plus grand commun diviseur les facteurs communs sont seuls combinés par multiplication en leur donnant le plus petit des deux exposants : il en résulte que dans le produit du moindre multiple par le plus grand commun diviseur, 1° chaque facteur commun a pour exposant *le plus petit et le plus grand des exposants;* 2° chaque facteur non commun se trouve dans ce produit.

Le produit ainsi effectué est donc bien égal à celui des deux nombres donnés.

173. Lorsque par rapport à un facteur donné, on étudie la composition d'un nombre quelconque, on découvre la condition nécessaire et suffisante pour que ce nombre soit premier avec ce facteur. Rapprochons les nombres impairs (parmi lesquels se trouvent les nombres premiers) des diviseurs 6 et 8.

Théorème xii. *Tous les nombres premiers, excepté* 2 *et* 3, *sont supérieurs ou inférieurs de* 1 *à un multiple de* 6.

Démonstration. Ne considérant que la série croissante des nombres impairs, et remarquant que le reste de la division par 6 d'un tel nombre ne peut être que 1, 3 ou 5, on conçoit que tout nombre impair peut être représenté par l'une des trois formules :

$$6x+1,\ 6x+3,\ 6x+5$$

La seconde ne peut évidemment pas caractériser un nombre premier, puisque les nombres qu'elle renferme sont des

multiples de 3, et que 3 est excepté ; de plus en changeant 5 en 6 — 1, la formule $6x + 5$ revient à la forme

$$6x - 1$$

Donc tout nombre premier est de l'une ou de l'autre des formes $6x \pm 1$; et l'on peut ainsi dire que *tout nombre premier excepté 2 et 3, diminué ou augmenté de 1 est divisible par 6.*

174. On doit se garder de conclure que :

Tout nombre compris dans la formule $6x \pm 1$ *est un nombre premier.*

En effet pour $x = 4, 6, 8, 12, \ldots$ cette formule ne donne pas nécessairement des nombres premiers ; et c'est ce que l'on devait prévoir puisqu'en raisonnant sur la série des nombres impairs, nos conséquences doivent porter aussi bien sur les nombres impairs que sur les nombres premiers.

175. Par rapport à 6, tous les nombres impairs sont de l'une des quatre formes :

$$6x \pm 1, \quad 6x \pm 3$$

dont la dernière $6x - 3$ s'obtient de celle $6x + 3$ en y remplaçant 3 par 6 — 3.

176. Corollaire. *Le carré d'un nombre premier plus grand que 3 est supérieur de 1 à un multiple de 12.*

Nous avons trouvé que les nombres premiers sont de l'une des deux formes $6x \pm 1$; élevant ces formes au carré, il vient :

$$\overline{6x \pm 1}^{\,2} = \dot{36} + \dot{12} + 1 = \dot{12} + 1 \qquad (c.q.f.d.)$$

177. Théorème xiii. *Tous les nombres impairs, et par con-*

séquent aussi tous les nombres premiers, sont supérieurs ou inférieurs de 1, de 3 ou de 5 à un multiple de 8.

Démonstration. Un nombre impair quelconque peut être représenté par $2x+1$, forme qui, par le changement possible de x en $2x$ ou en $2x \pm 1$, donne les trois suivantes :

$$4x+1, \quad 4x-1, \quad \text{et} \quad 4x+3.$$

Et comme le changement de 3 en $4-1$ donne à $4x+3$ la forme $4x-1$, les nombres impairs sont de l'une des deux formes :

$$4x \pm 1$$

Par les changements de x en $2x$, et en $2x \pm 1$, ces deux formes conduisent encore aux suivantes :

$$8x+1, \quad 8x-1, \quad 8x+3, \quad 8x-3, \quad 8x+5, \quad 8x-5.$$

On a donc

$$8x \pm 1, \quad 8x \pm 3, \quad 8x \pm 5.$$

De plus on peut remarquer que les formules $8x \pm 3$ et $8x \pm 5$ rentrent l'une dans l'autre, en remplaçant 5 par $8-3$. Selon cette décomposition les nombres premiers se groupent comme suit :

$8x+1$	1, 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137,...
$8x+3$	3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107,...
$8x-3$	5, 13, 29, 37, 53, 61, 101, 109,...
$8x-1$	7, 23, 31, 47, 71, 79, 103, 127,...

178. Corollaire I. *Le carré d'un nombre impair est supérieur de 1 à un multiple de 8.*

Les formes essentiellement différentes $8x \pm 1$ et $8x \pm 3$, d'un nombre impair, donnent par l'élévation au carré :

$$\overline{8x \pm 1}^{\,2} = \dot{8} + 1$$

$$\overline{8x \pm 3}^{\,2} = \dot{8} + 9 = \dot{8} + 8 + 1 = \dot{8} + 1. \ (c.q.f.d.)$$

179. Corollaire ii. *La différence des carrés de deux nombres impairs est un multiple de* 8.

C'est une conséquence évidente du corollaire précédent.

180. Théorème xiv. *La somme du cube d'un nombre* pair *et de* vingt *fois ce nombre est divisible par* 48.

Démonstration. Représentons ce nombre pair par $2n$, n pouvant être lui-même pair ou impair ; on doit démontrer que

$$\overline{2n}^{\,3} + 20 \cdot 2n = \dot{48}, \quad \text{ou} \quad 8n^3 + 40 \cdot n = \dot{48}$$

ou encore

$$n^3 + 5n = \dot{6}, \quad n(n^2 + 5) = \dot{6}$$

Par rapport à 6 un nombre quelconque n peut avoir l'une des formes suivantes :

$$n = \dot{6} + 1$$

$$n = \dot{6} + 2 = \dot{6} + 3 - 1 = \dot{3} - 1$$

$n = \dot{6} + 3 = \dot{3}$ (c'est un multiple impair de la forme $(2p+1)\,3$.

$$n = \dot{6} + 4 = \dot{6} + 3 + 1 = \dot{3} + 1$$

$$n = \dot{6} + 5 = \dot{6} + 6 - 1 = \dot{6} - 1$$

Examinons successivement, pour chacune de ces formes et par rapport à 6, l'état des facteurs du produit $n(n^2+5)$.

1er cas. Soit $n = \dot{6} \pm 1$, d'où

$$n^2 = \overline{\dot{36}} \pm \overline{\dot{12}} + 1 \text{ et } n^2 + 5 = \dot{6}$$

C'est-à-dire que si n n'est pas multiple de 6, $n^2 + 5$ est divisible par 6.

2e cas. Supposons $n = \dot{3} \pm 1$, d'où $n = \dot{2}$ et $n^2 = \dot{4}$.

Or alors

$$n^2 = \dot{9} \pm \dot{6} + 1 = \dot{6} + 1, \text{ et } n^2 + 5 = \dot{6}$$

Le produit $n(n^2+5)$ est donc multiple d'au moins 24.

3e cas. Soit $n = (2p+1)\,3$

Le carré de $2p+1$ étant *impair*, on en déduit que n^2 est *un multiple impair* de 9 ayant la forme, (k étant un nombre entier),

$$n^2 = (2k+1)\,9$$

D'où l'on tire

$$n^2 + 5 = 2k \,.\, 9 + 9 + 5 = 2k \,.\, 9 + 14.$$

et

$$n^2 + 5 = \dot{2}$$

Dans le cas qui nous occupe le produit $n(n^2+5)$ est multiple d'au moins 6.

La divisibilité par 48 de

$$\overline{2n}^3 + 20 \,.\, 2n$$

est donc établie.

EXERCICES.

1. *Théorème.* Un nombre est divisible par 6 si le chiffre des unités augmenté de 4 fois, ou diminué de deux fois la somme de tous les autres, donne un multiple de 6.

2. *Théorème.* Un nombre est divisible par 4, si le chiffre des unités augmenté ou diminué du double du chiffre des dizaines, donne un multiple de 4.

3. *Théorème.* Un nombre est divisible par 8 si le chiffre des unités augmenté du double du chiffre des dizaines, et augmenté ou diminué de 4 fois le chiffre des centaines, donne un multiple de 8.

4. *Théorème.* La somme des carrés de deux nombres impairs n'est jamais divisible par 4.

5. *Théorème.* Si l'on prend au hasard deux nombres entiers, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence, est nécessairement divisible par 3.

6. *Théorème.* La quatrième puissance d'un nombre non divisible par 5, est toujours terminée par 1 ou par 6.

7. *Théorème.* Un nombre est divisible par 7 si la somme des produits de ses différents chiffres, en allant de droite à gauche, par la série périodique des facteurs

1,3,2, 6, 4,5 ; 1,3.2,6,4,5

est un multiple de 7.

8. *Théorème.* Un nombre est divisible par 7, si la différence de la somme des produits des unités, dizaines, centaines de chaque groupe pair par les facteurs 1, 3, 2, à celle des produits semblables pour les ordres impairs est nulle ou multiple de 7.

9. Trouver des caractères simples de divisibilité par 13, 17, 31, 41. 61, 71, 101, etc.

10. Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 11, on peut opérer simplement comme suit :

Partagez le nombre proposé en tranches de deux chiffres en

commençant par la droite. Au-dessous de chaque tranche écrivez son excès sur le plus grand multiple de 11 qui s'y trouve contenu. Faites la somme de ces excès en supprimant le nombre 11 à mesure qu'il se forme ; la somme finale est le reste demandé.

11. *Théorème.* Le carré d'un nombre premier, autre que 2 et 3, est égal à un multiple de 24 augmenté d'une unité.

12. *Théorème.* Le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6.

13. *Théorème.* n étant un nombre quelconque, le produit

$$n\,(n+1)\,(2n+1)$$

est un multiple de 6.

14. *Théorème.* Le produit de trois nombres consécutifs ne peut être ni un carré, ni le double d'un carré.

15. *Théorème.* Le produit de quatre nombres consécutifs ne peut être un carré.

16. *Théorème.* Si tous les diviseurs d'un nombre sont écrits les uns à la suite des autres, dans l'ordre de leur grandeur, le produit de deux diviseurs à égales distances des extrêmes est égal au nombre lui-même.

17. Quels sont, parmi les nombres suivants, ceux qui sont premiers :

83, 157, 187, 239, 357, 486, 499, 881, 943. 1157, 1223.

18. Trouver *tous* les diviseurs des nombres

504, 756, 1260, 2058.

Déterminer ensuite, pour chaque nombre, les sommes de tous ces diviseurs.

19. Trouver le plus grand commun diviseur de ces mêmes nombres.

20. Par quel nombre faut-il multiplier le moindre multiple des nombres 126, 240 et 512 pour avoir leur plus grand commun diviseur. (*Sans chercher ce plus grand commun diviseur*).

LIVRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DES FRACTIONS.

CHAPITRE I.

Identité de la fraction et du quotient. — Transformation d'un nombre fractionnaire en fraction. — Extraction des entiers qui peuvent se trouver dans une expression fractionnaire. — Changements de valeur d'une fraction par suite de la multiplication ou de la division de l'un de ses termes. — Constance de valeur d'une fraction dont les deux termes sont simultanément multipliés ou divisés par un même nombre. — Addition ou soustraction simultanée d'un même nombre aux deux termes d'une expression fractionnaire. — Simplification d'une fraction ; réduction à la plus simple expression. — Réduction des fractions au même dénominateur; condition nécessaire et suffisante de cette transformation ; deux méthodes, par le plus petit dénominateur commun, par la méthode générale. — Évaluation des changements de valeur d'une fraction, par accroissements ou décroissements simultanés et égaux subis par ses termes.

181. Après les généralités présentées sur les fractions dans le livre I, établissons quelques propriétés générales qui en dirigent le calcul.

THÉORÈME I. *Une fraction est égale au quotient de la division de son numérateur par son dénominateur*

Démonstration. Soit la fraction

$$\frac{18}{7}$$

qui représente 18 unités fractionnaires, dont *chacune* a été obtenue en partageant l'unité primitive en 7 parties égales ; chacune des parties dont se compose 18 a donc été divisée par 7, ce qui signifie, en d'autres termes, que 18 lui-même est divisé par 7. (*c.q.f.d.*)

182. Et réciproquement :

THÉORÈME II. *Tout quotient est égal à l'expression fractionnaire dont le diviseur est le dénominateur, et le dividende le numérateur.*

Démonstration. Soit la division

$$25:37$$

Nous avons vu (n° 49) que l'on multiplie une somme en multipliant chacune des parties de cette somme ; par suite on divisera une somme par un nombre, en divisant chacune des parties par ce nombre : dès lors, décomposant 25 en ses unités, puis divisant chaque unité par 37, il est clair que le quotient proposé exprimera 25 parties dont chacune est le 37me de l'unité entière, et qu'ainsi ce quotient est bien égal à la fraction $\frac{25}{37}$. (*c.q.f d.*)

Ce qui vient d'être dit dans les deux paragraphes précédents, subsiste encore pour les *nombres fractionnaires.* — Une autre démonstration du théorème II a été donnée (n° 90); toutefois pour ne pas rompre la liaison des idées, nous avons maintenu ce théorème au chapitre actuel.

Remarque. Il suit de là que, selon que le dénominateur d'une expression fractionnaire sera plus *grand*, *égal* ou plus *petit* que le numérateur, l'expression sera *une fraction* proprement dite, ou *l'unité* ou un *nombre fractionnaire.*

183. Problème 1. *Transformer un nombre fractionnaire en une fraction à deux termes.*

Soit le nombre fractionnaire

$$7\,\tfrac{8}{11}$$

Ce nombre renfermant les *trois* éléments distints 7, 8 et 11 est appelé expression fractionnaire à *trois termes* par opposition à $\frac{8}{11}$ qui a reçu le nom de fraction à *deux termes*, ou à deux éléments 8 et 11.

La forme

$$7+\tfrac{8}{11}$$

que l'on peut évidemment donner au nombre $7\,\frac{8}{11}$, provient d'une division, dont le dividende est égal au reste 8 augmenté du produit du diviseur 11 par le quotient entier 7 ; ce dividende est donc

$$7\cdot 11+8$$

Et la division proposée à laquelle appartient le nombre $7\,\frac{8}{11}$, est :

$$\frac{7\cdot 11+8}{11}$$

D'où l'on déduit cette règle :

Pour transformer un nombre fractionnaire en fraction à deux termes, il faut en multiplier le nombre entier par le dénominateur, ajouter le numérateur à ce produit, et donner à cette somme le même dénominateur.

Cas particulier. On a en général, quels que soient les termes de la *fraction* $\frac{8}{11}$,

$$7\,\tfrac{8}{11}=\frac{7\cdot 11+8}{11}.$$

Et il est clair que le raisonnement précédent appliqué au cas où le numérateur est *nul* fournirait

$$7 = \frac{7 \cdot 11}{11}$$

d'où l'on voit que :

Pour traduire un nombre entier en une fraction à deux termes, de dénominateur donné, il faut multiplier ce nombre par le dénominateur, et donner à ce produit le dénominateur proposé.

184. Problème ii. *Dégager la partie entière d'une fraction à deux termes dont le numérateur est plus grand que le dénominateur.*

Puisque tout nombre fractionnaire (181) provient de la division du numérateur par le dénominateur, en effectuant cette division on trouvera pour *quotient entier* la partie entière demandée : ainsi l'on aurait

$$\tfrac{74}{13} = 5 + \tfrac{9}{13} = 5\,\tfrac{9}{13}$$

On a donc :

La partie entière d'une fraction à deux termes est égale au quotient entier *du numérateur par le dénominateur.*

185. Lemme. *Si deux fractions sont semblables, la plus grande est celle de plus grand numérateur ; et si deux fractions ont même numérateur, la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus petit.*

Démonstration. Lorsqu'il s'agit de fractions semblables la proposition est presqu'évidente, puisqu'alors les unités fractionnaires étant les mêmes, la collection la plus grande de ces unités aura la plus grande valeur.

Inversement, si les fractions ont des numérateurs égaux, si par exemple, l'on compare

$$\frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{11}$$

on se souviendra que *ces fractions ne sont que des nombres entiers* (26) *d'unités fractionnaires*; et puisque l'unité fractionnaire est d'autant plus grande qu'elle est contenue moins de fois dans l'unité entière, il devient clair que la plus grande de ces fractions est celle dont le dénominateur est le plus faible.

Sous une autre forme on pourrait encore dire que :

Chacune de ces fractions renferme 13 parties de l'unité, mais les parties de la première sont des *neuvièmes*, et celles de la seconde sont plus petites, puisque ce sont des *onzièmes*; donc la première fraction est plus grande que la seconde.

186. Théorème III. *Si l'on multiplie ou si l'on divise le numérateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est multipliée ou divisée par ce nombre.*

Démonstration. En effet, le dénominateur restant le même, les parties de l'unité, qui composent la fraction, conservent la même valeur ; par suite, si l'on en prend deux, trois .... fois plus ou moins, le résultat sera deux, trois ... fois plus grand ou plus petit. *c. q. f. d.*

Ainsi $\frac{28}{11}$ est quadruple de $\frac{7}{11}$, et inversement, $\frac{7}{11}$ est le quart de $\frac{28}{11}$.

187. 2e *Démonstration*. Nous avons vu (184) que,

Sans altérer le diviseur, *si le dividende est multiplié ou divisé par un nombre, le quotient est lui-même multiplié ou divisé par ce nombre.*

Les mots diviseur, dividende et quotient étant changés

comme cela est permis (nos 181. 182), respectivement en dénominateur, numérateur et fraction, la propriété devient évidente.

188. THÉORÈME IV. *Si l'on multiplie ou si l'on divise le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est divisée ou multipliée par ce nombre.*

1re *Démonstration.* Soit la fraction

$$\frac{3}{7}$$

Multiplions-en le dénominateur par 4, et l'on aura

$$\frac{3}{7.4}$$

fraction dans laquelle les parties égales de l'unité sont 4 fois plus nombreuses et par suite aussi 4 fois plus petites que dans la fraction proposée ; l'égalité des numérateurs prouve dès lors que la seconde fraction est le quart de la première, *comme composée du même nombre de parties de l'unité, devenues quatre fois plus petites.*

Inversement, puisque pour retourner de la seconde fraction à la première, il faudrait diviser par 4 le dénominateur de la fraction $\frac{3}{7.4}$, il est clair que *l'on rend une fraction quatre fois plus grande en divisant son dénominateur par 4.*

189. 2e *Démonstration.* Au numéro (85) on a vu que :

SANS ALTÉRER LE DIVIDENDE, *si l'on multiplie ou si l'on divise le diviseur par un nombre, le quotient est divisé ou multiplié par ce nombre.*

Le recours aux principes 181 et 182 transforme immédiatement cet énoncé dans celui du théorème IV.

190. REMARQUE. 1° *On multiplie une fraction par un nom-*

bre entier en en multipliant le numérateur, ou en divisant le dénominateur par ce nombre.

2° *On divise une fraction par un nombre entier, en en multipliant le dénominateur, ou en en divisant le numérateur par ce nombre.*

Observons toutefois que ces changements ne pourront être *réalisés* par la *division* de l'un des termes de la fraction, que si ce terme est multiple du diviseur considéré; s'il n'en est pas ainsi, on opère par multiplication sur le terme de dénomination contraire. Par exemple si l'on veut rendre 4 fois plus petite la fraction $\frac{25}{7}$, on sera forcé de multiplier le dénominateur par 4, attendu que le numérateur n'étant pas un multiple de 4, on ne pourrait effectuer la division du numérateur 25 par 4.

191. Théorème v. *On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.*

1re *Démonstration.* Supposons que l'on multiplie par 3 les deux termes de la fraction

$$\frac{5}{7}$$

il viendra

$$\frac{5\cdot3}{7\cdot3}$$

Cette seconde fraction contient 3 fois plus d'unités fractionnaires que la première; mais aussi l'unité $\frac{1}{7\cdot3}$ est trois fois moindre que celle $\frac{1}{7}$ de la fraction proposée : la seconde fraction est donc équivalente à la première.

En second lieu, et quant à la division, nous remarquons qu'en divisant par 3 les deux termes de la fraction $\frac{5\cdot3}{7\cdot3}$, on retourne à $\frac{5}{7}$; ce qui prouve qu'une fraction conserve la même valeur lorsque l'on en divise les termes par un même nombre.

192. 2ᵉ *Démonstration.* Au nº 86 nous avons vu qu'*en multipliant ou en divisant les deux termes d'une division par un même nombre, on n'altère pas le quotient complet;* il suffit donc de changer dans cet énoncé les dénominations relatives à l'algorithme de la division par celles relatives à l'algorithme fractionnaire, pour obtenir la propriété demandée.

(*c. q. f. d.*)

193. Scholie. Nous conseillons beaucoup l'adoption des démonstrations nouvelles 187, 189, 192 que nous venons de présenter ; ces démonstrations si courtes, si simples, nous paraissent préférables à tous égards à celles généralement connues 186, 188, 191.

194. *Une fraction quelconque étant donnée, pour la transformer en une autre dont le dénominateur est multiple du sien, il faut en multiplier les deux termes par le quotient du dénominateur nouveau et du dénominateur primitif.* Cela résulte immédiatement du théorème V.

195. Etudions les changements de valeur d'une fraction par suite de l'addition ou de la soustraction d'un même nombre aux deux termes.

Théorème vi. *Une fraction augmente de valeur par l'addition ou la soustraction d'un même nombre à ses deux termes.*

Démonstration. Soit l'expression fractionnaire plus petite que 1,

$$\frac{3}{8} \qquad (1)$$

D'où par addition de 4 au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{3+4}{8+4} \qquad (2)$$

La différence des deux termes de (1) est *évidemment* égale à celle des termes de (2), attendu que (n° 71) *la différence de deux nombres ne change pas par une égale augmentation ou diminution de chacun de ces nombres.*

Il en résulte que si l'on cherche les fractions complémentaires à l'unité, des expressions (1) et (2), on trouve

$$\frac{5}{8} \qquad (3)$$

et

$$\frac{5}{12} \qquad (4)$$

De ces dernières fractions, dont les numérateurs sont nécessairement égaux, $\frac{5}{12}$ étant la plus petite, on conclut que :

$$\frac{3+4}{8+4} > \frac{3}{8} \qquad (5)$$

La fraction proposée a donc *augmenté* de valeur par l'addition effectuée simultanément à ses deux termes; de plus, en considérant la fraction (2) comme primitive, on voit qu'elle diminue de valeur par la soustraction effectuée à ses termes.

196. Théorème vii. *Un nombre fractionnaire augmente ou diminue de valeur par la soustraction ou l'addition d'un même nombre à ses deux termes.*

Démonstration. Soit l'expression

$$\frac{17}{4} \qquad (6)$$

D'où l'on déduit

$$\frac{17+3}{4+3} \qquad (7)$$

Les fractions complémentaires à l'unité seront ici celles

qui devront être soustraites de (6) et (7) pour donner 1 pour reste ; ces compléments sont donc respectivement :

$$\frac{13}{4} \qquad (8)$$

et

$$\frac{13}{7} \qquad (9)$$

La dernière de ces fractions étant plus petite que la précédente, il s'en suit que

$$\frac{17+3}{4+3} < \frac{17}{4} \qquad (10)$$

Cette relation démontre le théorème.

197. On dit qu'une fraction est d'autant plus *simple* que les termes en sont plus petits.

Une fraction est dite *irréductible* lorsqu'elle ne peut être exprimée en termes moindres.

Il s'en suit que *réduire une fraction à sa plus simple expression*, c'est déterminer la fraction irréductible qui lui est égale.

Le théorème V (n° 191) permet de *simplifier une fraction*, en divisant ses deux termes par un même nombre; si ce nombre est leur plus grand commun diviseur, les deux termes deviennent premiers entr'eux et le même procédé ne peut plus dès ce moment permettre une simplification impossible d'après le théorème suivant :

198. Théorème viii. *Lorsque les deux termes d'une fraction sont premiers entr'eux, 1° les deux termes de toute fraction équivalente sont des équimultiples des termes de la première; 2° elle est irréductible.*

Démonstration. 1° Soit $\frac{a}{b}$ une fraction dont les deux termes

sont premiers entr'eux, et $\frac{p}{q}$ une fraction équivalente ; on nous donne

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

En multipliant par b les deux termes de la première fraction et par q les deux termes de la seconde, on ne change point les valeurs de ces fractions ; par conséquent

$$\frac{p \cdot b}{q \cdot b} = \frac{a \cdot q}{b \cdot q}$$

Ces deux fractions égales ont même dénominateur (n° 45) ; leurs numérateurs sont donc égaux et l'on a

$$p \cdot b = a \cdot q$$

Le premier membre de cette égalité est divisible par b ; il doit donc en être de même du second, et comme b *est premier avec le facteur* a, b *devra* (n° 141) *diviser le facteur* q. Soit k le quotient entier, et

$$q = b\,k$$

On en déduit

$$p \cdot b = a \cdot b \cdot k$$

d'où en divisant les deux membres de cette égalité par b, il vient :

$$p = a\,k$$

On voit donc que les deux termes p et q de la fraction $\frac{p}{q}$, égale à $\frac{a}{b}$, sont respectivement les produits de a et b par un même nombre entier k, et que par suite ils sont des *équimultiples* de a et b.

2° D'après cela toute fraction équivalente à une fraction dont les termes sont premiers entr'eux, a des termes respectivement plus grands que ceux de cette fraction, qui est conséquemment la plus simple, et comme telle *irréductible*.

(c.q.f.d.)



199. Corollaire i. *Deux fractions irréductibles égales sont identiques.*

En effet, si $\frac{p}{q}$ était irréductible, par une démonstration analogue on obtiendrait encore

$$p = ak$$
$$q = bk$$

C'est-à-dire que pour toute valeur de k, différente de 1, les nombres p et q ne seraient pas premiers entr'eux, comme cela est donné. On a donc $k = 1$, et

$$p = a$$
$$q = b$$

200. Corollaire ii. *Pour former toutes les fractions équivalentes à une fraction donnée, il suffit de rendre celle-ci irréductible, puis de multiplier ses deux termes par les nombres entiers consécutifs.*

$$k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Corollaire iii. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, il suffit de diviser les deux termes par le plus grand commun diviseur;* on obtient alors une fraction irréductible, comme ayant (n° 135) ses deux termes premiers entr'eux.

Observation. La réduction d'une expression fractionnaire à sa plus simple expression sera toujours précédée de l'extraction des entiers, attendu qu'il serait absolument inutile d'opérer sur de plus grands nombres que ceux qui sont strictement indispensables : d'ailleurs la recherche du plus grand commun diviseur fournit immédiatement, pour premier quotient, celui que l'on doit ainsi isoler.

203. Nous avons démontré (198) que lorsque les deux

termes d'une fraction sont premiers entr'eux les deux termes de toute fractiou équivalente sont des équimultiples des termes de la première ; il s'en suit que lorsqu'une fraction est donnée, on peut en modifier la forme de manière à lui donner pour dénominateur *tel multiple que l'on veut de son dénominateur.* Ainsi, si la fraction $\frac{5}{7}$ doit être transformée en une autre dont le dénominateur soit 7·6 ou 42, on multipliera par 6 les deux termes de cette fraction, et l'on aura :

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6}$$

Lorsque la fraction proposée est *irréductible*, comme celle que nous venons de choisir, les nombres que l'on peut avoir pour dénominateur de ses transformées équivalentes sont nécessairement des multiples du dénominateur; mais si la fraction n'est pas irréductible, il y a lieu de rechercher à quelle condition doit satisfaire un nombre pour devenir dénominateur d'une de ces transformées.

THÉORÈME IX. *Pour qu'une fraction soit réductible en une autre d'un dénominateur assigné, il* FAUT *et il* SUFFIT *que le nouveau dénominateur renferme tous les facteurs premiers* DIFFÉRENTS *qui, composant le dénominateur primitif, ne se trouvent pas en même temps dans le numérateur.*

Démonstration. Soit la fraction

$$\frac{a}{b}$$

et q le dénominateur de transformation; en désignant par p le numérateur, on doit avoir :

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

Par des opérations analogues à celles employées (198), on en déduit

$$q \cdot a = p \cdot b, \text{ et } p = \frac{q \cdot a}{b}$$

Ce qui signifie que le produit *qa du dénominateur assigné par le numérateur de la fraction*, doit être divisible par b, et par suite par chacun des facteurs premiers de b ; donc après avoir supprimé dans a les facteurs de b qui pourraient s'y trouver, il faudra que chacun des autres facteurs de b, *étrangers à* a, soient des diviseurs de q. (*c.q.f.d.*)

Toutes les fois donc que cette condition ne sera pas satisfaite, le passage de la fraction $\frac{a}{b}$ à celle d'espèce q, ne pourra avoir lieu. Cette condition était importante à établir, et *tous* les auteurs se taisent sur ce point; c'est à peine si quelques traités ont la précaution de dire que dans de telles transformations, *la fraction proposée sera*, s'il y a lieu. *rendue irréductible.*

204. Corollaire i. *Pour que plusieurs fractions soient réductibles en fractions d'un même dénominateur assigné, il* FAUT *et il* SUFFIT *que ce dénominateur commun renferme tous les facteurs premiers* DIFFÉRENTS *qui, composant les dénominateurs des fractions proposées, ne se trouvent pas dans les numérateurs correspondants.*

C'est là une conséquence immédiate du théorème précédent.

Faisons ressortir, par un exemple, la vérité de cette proposition : soient les fractions

$$\frac{2 \cdot 13}{2^2 . 3 . 5} \quad \text{et} \quad \frac{2 . 3 . 5}{3^3 . 7}$$

Dont les facteurs des dénominateurs, étrangers aux numérateurs respectifs, sont

$$2 . 3 . 5 \quad \text{et} \quad 3 . 3 . 7$$

Assignons pour dénominateur nouveau le nombre

$$2 . 3 . 3 . 5 . 7$$

qui remplit évidemment, pour chacune des fractions données la condition du nº 204.

En appelant p et p' les nouveaux numérateurs, on aura

$$p = \frac{2.3.3.5.7 \times 2.13}{2^2.3.5} = 819$$

$$p' = \frac{2.3.3.5.7 \times 2.3.5}{3^3.7} = 300$$

$$q = 2.3.3.5.7 = 1890$$

On a ainsi les nouvelles fractions

$$\frac{819}{1890} \text{ et } \frac{300}{1890}$$

205. Remarque. *Tout multiple du produit des facteurs premiers de chaque dénominateur, étrangers au numérateur correspondant, peut être admis pour dénominateur de réduction.*

C'est-à-dire que pour les fractions sur lesquelles nous venons d'opérer, on peut, en désignant par N un nombre entier quelconque, prendre pour dénominateur de transformation le produit

$$2.3.3.3.5.7.N.$$

206. Corollaire II. *Le plus petit dénominateur commun possible, pour des fractions données, est le moindre multiple des divers produits formés, pour chaque fraction, par les facteurs du dénominateur étrangers au numérateur.*

Il est évident, en effet, que tout nombre convenable devant contenir, eu égard à chaque fraction, chacun de ces facteurs étrangers, devra posséder la plus haute puissance à laquelle ce facteur entre dans les divers produits auxquels donnent lieu les fractions. En désignant par m ce moindre multiple, ou dénominateur le plus petit possible, tous les nombres à

choisir pour dénominateur de réduction seront fournis par le produit

$$m \cdot N$$

dans lequel on n'aura qu'à poser successivement

$$N = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

207. Corollaire III. *Le plus petit dénominateur de réduction est le moindre multiple des dénominateurs des fractions irréductibles que l'on déduit des fractions proposées.*

Car si l'on imagine que l'on réduise d'abord chaque fraction à sa plus simple expression, les *facteurs étrangers* dont il est question dans cette théorie, deviennent ceux du dénominateur de la fraction ainsi réduite ; et dès lors la proposition est évidente.

208. De ce qui précède résulte une méthode simple et facile pour *la recherche du moindre dénominateur commun :* deux marches très-différentes sont à suivre :

1° Réduire les fractions données à leur plus simple expression et prendre pour dénominateur commun, le moindre multiple des nouveaux dénominateurs.

2° *Sans faire cette réduction*, former *pour chaque* fraction, le produit des facteurs du dénominateur étrangers au numérateur ; puis déterminer le moindre multiple des produits obtenus.

On parviendra ainsi au même dénominateur qu'auront fourni les fractions irréductibles par la première méthode ; mais on sera le plus souvent dispensé de suivre le détail de décompositions quelquefois longues.

La détermination des nouveaux numérateurs se fait conformément à la formule (n° 203)



$$p = \frac{a}{b}$$

qui montre que *le nouveau numérateur est le quotient par l'ancien dénominateur du produit du dénominateur nouveau par l'ancien numérateur.*

209. Ayant obtenu (n° 203)

$$q\,a = p\,b$$

nous en avons déduit que $q\,a$ devait être divisible par b : or si l'on choisissait q de manière à être égal à b, à plus forte raison $q\,a$ serait-il divisible par b ; en continuant à diriger la détermination de q, pour chaque fraction, par la condition d'être égal au dénominateur de cette fraction, on est conduit à *adopter pour dénominateur commun le produit des dénominateurs de toutes les fractions.*

Ce dénominateur spécial, généralement bien plus grand et par suite bien plus désavantageux que le *moindre multiple* ci-dessus employé, donne lieu à la MÉTHODE GÉNÉRALE soumise à la règle :

Pour réduire un nombre quelconque de fractions au même dénominateur, multipliez chaque numérateur par le produit de tous les autres dénominateurs; le dénominateur commun est le produit de TOUS *les dénominateurs.*

210. SCHOLIE. Il est clair que c'est à cette dernière règle que l'on est ramené, lorsque les fractions étant irréductibles tous les dénominateurs sont premiers, ou premiers entr'eux.

211. On comprend que *toutes les fois que le passage aux fractions irréductibles sera interdit ou impossible,* on devra, dans la réduction au moindre dénominateur commun possible, suivre la marche et la théorie exposée depuis le n° 203 : cette méthode, qui part d'un principe important à établir,



est celle que nous conseillons à ceux qui se destinent aux études scientifiques.

Lors d'une première exposition de l'Arithmétique, et pour les classes inférieures, on peut adopter la méthode généralement reçue et dans le détail de laquelle nous allons entrer.

212. Lorsque des fractions sont *semblables* comme $\frac{8}{17}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, il est toujours bien facile de les comparer, attendu que cette comparaison revient alors (26) à celle des numérateurs; mais il n'en est plus de même quand les dénominateurs sont différents.

Réduire des fractions au même dénominateur, c'est trouver des fractions équivalentes aux premières et qui aient un même dénominateur.

213. Théorème x *Pour réduire deux fractions au même dénominateur il suffit de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre.*

Démonstration. Soient les fractions

$$\frac{3}{7}, \quad \frac{5}{8}$$

Comme on peut (191) multiplier par un même nombre les deux termes d'une fraction, sans altérer la valeur de cette fraction, nous aurons en suivant les prescriptions indiquées par l'énoncé :

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 8}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 7}$$

Les nouveaux dénominateurs sont égaux comme produits composés des mêmes facteurs; en effectuant les multiplications on aura

$$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$$

214. Théorème xi. *Pour réduire un nombre quelconque de fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chacune d'elles, par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

Démonstration. Soient les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{9},\ \frac{11}{12}.$$

En multipliant les deux termes de chacune de ces fractions respectivement par les produits,

$$7\cdot9\cdot12,\ 3.9\cdot12,\ 3.7\cdot12,\ 3.7\cdot9,$$

formés d'après l'énoncé, il viendra

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot7\cdot9\cdot12}{3.7.9\cdot12}=\frac{1512}{2268}$$
$$\frac{4}{7}=\frac{4\cdot3\cdot9\cdot12}{7\cdot3\cdot9.12}=\frac{1296}{2268}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{5.3\cdot7\cdot12}{9\cdot3\cdot7\cdot12}=\frac{1260}{2268}$$
$$\frac{11}{12}=\frac{11.3.7.9}{12.3\cdot7.9}=\frac{2079}{2268}$$

Les nouveaux dénominateurs sont égaux, puisqu'on ne change pas la valeur d'un produit dont on intervertit l'ordre des facteurs.

215. *Tout multiple commun des dénominateurs des fractions données peut être adopté pour dénominateur commun;* on l'emploie de la manière suivante :

On divise ce multiple commun par le dénominateur de chaque fraction, et l'on multiplie le numérateur correspondant par le quotient obtenu. Il peut arriver que le plus grand dénominateur soit multiple de tous les autres; on le prend alors pour dénominateur commun.



216. Quand on applique le procédé qui précède, la réduction n'est pas, en général, faite par rapport au plus petit dénominateur commun possible.

La règle qu'il faut suivre pour faire la réduction au même dénominateur de la manière la plus simple, repose sur le principe suivant :

Le plus petit dénominateur commun auquel on puisse réduire des fractions IRRÉDUCTIBLES *est le plus petit multiple de leurs dénominateurs* (n° 207, — corol. III.)

Démonstration. Soient les fractions irréductibles

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{a''}{b''}$$

D'après le théorème (n° 198), toute fraction équivalente à une fraction irréductible donnée a pour termes les produits des termes primitifs, de même nom, par un même facteur ; il faudra donc multiplier b, b', b'' par certains nombres pour obtenir le dénominateur commun qui est ainsi divisible par chacun des dénominateurs donnés.

Ce dénominateur commun qui est par suite multiple de chacun des dénominateurs sera donc le plus petit, lorsqu'il sera le moindre multiple de b, b' et b''.

Quant à la transformation on l'effectuera comme suit :

On divisera successivement le moindre multiple K par chacun des dénominateurs ; en représentant par q, q', q'' ... les quotients respectivement obtenus, mis en évidence par la décomposition en facteurs premiers, on pourra multiplier par ces quotients les numérateurs correspondants ; et l'on donnera à tous les produits résultants le dénominateur commun K le plus simple.

On aura ainsi

$$\frac{a}{b}=\frac{aq}{bq}=\frac{aq}{K}$$

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a'q'}{b'q'}=\frac{a'q'}{K}$$

$$\frac{a''}{b''}=\frac{a''q''}{b''q''}=\frac{a''q''}{K}$$

On peut donc formuler cette règle :

Pour réduire des fractions au plus petit dénominateur commun, on commence par les réduire chacune à leur plus simple expression. On cherche ensuite le plus petit multiple commun des nouveaux dénominateurs, et l'on multiplie le numérateur de chacune d'elles par le quotient obtenu en divisant ce moindre multiple commun par le dénominateur correspondant; aux produits ainsi formés on donne le moindre multiple pour dénominateur.

Il est indispensable de réduire les fractions proposées à leurs plus simples expressions, avant la recherche du plus petit dénominateur commun, afin d'*obtenir avec certitude* le plus petit dénominateur commun possible.

217. Le dispositif généralement suivi, pour ce genre de calcul, consiste à écrire sous chaque fraction le quotient du plus petit multiple par son dénominateur ; ensuite à multiplier ce quotient par le numérateur de la fraction.

Ainsi soient

$$\frac{19}{40},\ \frac{15}{28},\ \frac{13}{20}$$

K = plus petit multiple = 280

7, 10, 14

$$\frac{19 \cdot 7}{280}, \quad \frac{15 \cdot 10}{280}, \quad \frac{13 \cdot 14}{280}.$$

$$\frac{133}{280}, \quad \frac{150}{280}, \quad \frac{182}{280}.$$

218. Problème. *Quelle variation subit la valeur d'une expression fractionnaire dont les termes sont simultanément augmentés ou diminués d'un même nombre.*

Solution. Soit la fraction $\frac{A}{B}$, et i le nombre qui, de la même manière et en même temps, en modifie les termes ; on a à comparer les deux fractions

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{A+i}{B+i}$$

La réduction au même dénominateur, fournit les numérateurs

$$A(B+i), \quad B(A+i)$$

ou

$$AB + Ai, \quad AB + Bi$$

Ces deux numérateurs ayant une partie AB commune, leur état d'égalité ou d'inégalité proviendra des nombres

$$Ai \text{ et } Bi$$

Donc

1° Si $A > B$, la valeur diminue par l'addition et augmente par la soustraction d'un même nombre à chacun de ses termes.

2° Si A < B, la valeur augmente par l'addition et diminue par la soustraction d'un même nombre à chacun de ses termes.

La quantité, dont la valeur de l'expression a changé, est pour chacun de ces cas :

$$\frac{Ai - Bi}{B\,(B+i)}, \quad \frac{Bi - Ai}{B\,(B+i)}$$

CHAPITRE II.

THÉORIE DES ÉGALITÉS FRACTIONNAIRES.

Identité des idées de rapport, quotient et fraction. — Termes d'un rapport. — Égalité fractionnaire. — Produits égaux des termes de noms contraires, calcul d'un terme en fonction des trois autres. — Condition nécessaire et suffisante sous laquelle quatre nombres peuvent former une égalité de fractions. — Interversion des termes de noms contraires. — Renversement des rapports. — Propriétés des rapports entre les sommes ou entre les différences des termes de mêmes noms, ou de noms contraires. — Suite fractionnaire. — Termes égaux de mêmes noms dans deux égalités. — Multiplication ou division, terme à terme d'un nombre quelconque d'égalités fractionnaires. — Puissances et racines semblables de quatre nombres en égalité de fractions. — Des moyennes en général; moyenne différentielle, moyenne factorielle. — Entre deux nombres, la moyenne différentielle est plus grande que la moyenne factorielle.

219. Nous avons dit (n° 5) que l'on appelle *rapport* le résultat de la comparaison de deux grandeurs quelconques. Cette comparaison, qui sous-entend la division de l'une des grandeurs par l'autre, entraîne donc l'existence d'un *quotient;* mais nous supposons toujours tacitement ici que les grandeurs que l'on compare ont une *commune mesure*, qui est contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles : dans un autre livre nous traiterons des *rapports incommensurables*, et nous aurons alors à examiner ce que signifient et deviennent les opérations de l'arithmétique.

D'un autre côté, (n° 90) nous avons vu qu'une expression fractionnaire revient au quotient d'une division dont le numérateur est le dividende et le dénominateur, le diviseur.

Il y a donc *identité complète entre les idées de rapport, quotient et fraction*.

Dans le but sans doute de compliquer l'exposition d'une série de propriétés *très-simples*, on avait d'abord donné des noms *spéciaux* aux *deux termes* d'un rapport : ainsi le *diviseur*, ou *la quantité à laquelle on compare*, avait reçu le nom de CONSÉQUENT ; le dividende, c'est-à-dire la quantité que l'on compare à l'autre, avait été appelée ANTÉCÉDENT.

Ces dénominations nouvelles, *d'une inutilité absolue*, sont loin de remplacer avantageusement celles de numérateur ou dividende, de dénominateur ou diviseur : elles ont de plus l'inconvénient de ne pas rappeler immédiatement l'*idée simple et élémentaire* de fraction ou de quotient.

L'emploi de ces dénominations a constitué pendant longtemps un algorithme, sinon étrange, du moins *très-compliqué et inutile* : c'est donc avec raison, et d'après les conseils de savants dévoués à l'enseignement, que l'*Emploi de la terminologie proportionnelle a été* INTERDIT, en France, *de la manière la plus complète et la plus explicite.* (Arrêté de M. le ministre de l'Instruction publique, en date du 15 novembre 1854.)

Du reste, en 1816, Gergonne réclamait instamment une semblable expulsion.

Nous connaissons bien des établissements où l'*enseignement des proportions* occupe pendant une année entière de malheureux jeunes gens, qui perdent ainsi un temps précieux : nous appelons donc de tous nos vœux la suppression en Belgique de l'algorithme proportionnel.

220. Les propriétés, qui vont suivre dans ce chapitre, seront donc exposées au point de vue fractionnaire ; seule-

ment, comme transaction avec le système *encore toléré aujourd'hui*, chaque propriété sera énoncée, suivant l'ancien mode, *au bas de la page en petits caractères.*

221. On appelle *égalité fractionnaire* ou *proportion*, l'expression de l'égalité de deux *fractions* ou *rapports*. Ainsi,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ et } \frac{2}{3}=\frac{21}{18}$$

sont des égalités fractionnaires ou des proportions, qui se composent ainsi de quatre termes :

Le premier et le second numérateur, ou les premier et troisième termes ;

Le premier et le second dénominateur, ou les second et quatrième termes.

On énonce a sur b égal c sur d ; et 2 sur 3 égal 12 sur 18.

222. Théorème i. *Dans toute égalité fractionnaire, les produits des termes de noms contraires sont égaux.* (1)

Démonstration. Soit

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Réduisons au même dénominateur les deux fractions dont se compose cette égalité, et il viendra :

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d}=\frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

D'où

$$a\,d = bc \qquad (c.q.f.d.)$$

(1) Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

225. PROBLÈME. *Trois termes d'une égalité fractionnaire étant donnés, calculer le quatrième.* (1)

Supposons que les termes a, b, c, de

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

soient donnés, et que l'on demande le quatrième d.

Puisque

$$ad = bc$$

il viendra en divisant, par a, ces deux produits égaux :

$$d=\frac{bc}{a}$$

Si l'on avait à déterminer un numérateur c connaissant les trois autres termes on parviendrait à

$$c=\frac{ad}{b}$$

Ces deux dernières relations donnent lieu à la règle :

Un terme d'une égalité fractionnaire est le quotient par le terme de nom contraire de l'autre rapport, du produit de deux autres termes de l'égalité. (2)

Ainsi si l'on demande x de l'égalité

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{18}$$

On aura

$$x=\frac{2 \cdot 18}{3}=12$$

(1) Trois termes d'une proportion étant donnés, calculer le quatrième *(fameuse règle de trois).*

(2) Un extrême ou un moyen est égal au produit des moyens ou des extrêmes, divisé par l'extrême ou le moyen donné.

224. Théorème II. *Réciproquement, si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entr'eux soit égal au produit des deux autres, on peut former avec ces quatre nombres une égalité fractionnaire.*

Démonstration. Soient les quatre nombres a, b, c, d, tels que

$$ad = bc$$

Divisant ces deux produits égaux par le produit formé d'un facteur de l'un par un facteur de l'autre, par ab par exemple, il viendra

$$\frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab}$$

Après simplification de fractions, on obtient

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad \textit{c. q. f. d.}$$

Remarquons que les facteurs de chacun des produits donnés sont, deux à deux, les termes de noms contraires des deux rapports de l'égalité à laquelle nous venons de parvenir.

225. Corollaire I. *Dans toute égalité fractionnaire on peut intervertir l'ordre des termes de noms contraires de rapports différents.* (1)

On donne

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

(1) Dans toute proportion on peut changer l'ordre des moyens, ou l'ordre des extrêmes; ces changements peuvent aussi être simultanés.

D'où (n° 222),

$$ad = bc$$

En divisant successivement les deux nombres de cette égalité par les produits

$$ab, ac, dc$$

que l'on forme comme dans le paragraphe précédent, et en n'employant pas le produit *db*, qui ferait retourner à l'égalité ou proportion donnée, on obtient:

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad (3)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (4)$$

Les relations (1), (2), (3), (4) démontrent la propriété qu'il s'agissait d'établir.

226. Corollaire ii. *Dans toute égalité fractionnaire on peut renverser simultanément les rapports.*

De

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

On tire

$$bc = ad$$

Divisant de part et d'autre par *ac*, on aura

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (5)$$

c.q.f.d.

227. Théorème iii. *En additionnant ou en soustrayant les*

termes de même nom de deux fractions ÉQUIVALENTES, *on obtient une fraction de même valeur que les fractions données.*

Démonstration. Soient les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ entre lesquelles on a

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Désignant par q le rapport que représentent ces fractions, nous obtenons

$$a=bq$$
$$a'=b'q$$

L'addition ou la soustraction, membre à membre, de ces égalités conduit à

$$a\pm a'=(b\pm b')\,q$$

ou

$$\frac{a\pm a'}{b\pm b'}=q$$

D'où enfin

$$\frac{a\pm a'}{b\pm b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

c. q. f. d.

228. *Remarque.* Si $a' > a$, et par suite $b' > b$, par rapport à la différence, on soustraira la seconde des égalités

$$a=bq$$
$$a'=b'q$$

de la première; ce qui donnera

$$\frac{a'\pm a}{b'\pm b}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

229. Corollaire i. *Dans toute égalité fractionnaire, la somme ou la différence des numérateurs forme avec la somme ou la différence des dénominateurs des rapports égaux à chacun de ceux de l'égalité.* (1)

230. Corrollaire ii. *Si l'on ajoute, terme à terme, un nombre quelconque de fractions équivalentes, la nouvelle fraction ainsi formée est égale à chacune des proposées.*

Soient les fractions données

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}\dots \quad (1)$$

Désignant par q le rapport constant entre les deux termes de chaque fraction, on aura

$$a = bq$$
$$a' = b'q$$
$$a'' = b''q$$
$$a''' = b'''q$$

D'où par addition, membre à membre :

$$(a + a' + a'' + a''' + \dots) = (b + b' + b'' + b''' + \dots)\, q$$

Et enfin

$$\frac{a + a' + a'' + a''' + \dots}{b + b' + b'' + b''' + \dots} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \dots$$

c. q. f. d.

231. On donne le nom de suite fractionnaire à l'expression de l'égalité de plus de deux rapports ; au lieu de l'énoncé (n° 229), on peut alors donner le suivant :

(1) Dans toute proportion la somme ou la différence des antécédents est à la somme ou à la différence des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent.

Dans toute suite fractionnaire LE RAPPORT DE LA SUITE *est égal à celui de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs.* (1)

232. COROLLAIRE III. *Dans toute égalité de fractions le rapport de la somme des numérateurs à leur différence est le même que celui de la somme des dénominateurs à leur différence.* (2)

La propriété (n° 229) donne lieu aux deux relations

$$\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

$$\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

D'où il suit

$$\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a-a'}{b-b'}$$

Et changeant l'ordre du second et du troisième terme

$$\frac{a+a'}{a-a'}=\frac{b+b'}{b-b'} \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

233. COROLLAIRE IV. *Dans toute égalité fractionnaire le rapport, de la somme ou de la différence des deux premiers termes à la somme ou à la différence des deux derniers, est égal à celui du premier au troisième terme ou à celui du second au quatrième terme.* (3)

(1) Dans toute suite proportionnelle, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent.

(2) Dans toute proportion la somme des antécédents est à leur différence, comme la somme des conséquents est à leur différence.

(3) Dans toute proportion la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers comme le premier est au troisième, ou comme le second est au quatrième.

Car de l'égalité donnée

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

On déduit (n° 225)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

L'application du principe (n° 229) à cette relation, fournit :

$$\frac{a \pm b}{a' \pm b'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \qquad c.\,q.\,f.\,d.$$

234. Corollaire v. *Dans toute égalité fractionnaire le rapport de la somme des deux premiers termes à leur différence est égal au rapport de la somme des deux derniers termes à leur différence.* (1)

De la propriété précédente, et pour

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

on déduit

$$\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

$$\frac{a-b}{a'-b'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

D'où

$$\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a-b}{a'-b'}$$

(1) Dans toute proportion la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence.

Et par interversion des termes de noms contraires ,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{a'+b'}{a'-b'}$$ c. q. f. d.

235. Théorème iv. *Lorsque les numérateurs ou les dénominateurs de deux égalités fractionnaires sont égaux, les termes de nom* contraire *forment une nouvelle égalité de fractions.* (1)

Démonstration. Soient

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$$

Intervertissant l'ordre des second et troisième termes, nous aurons respectivement :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

D'où

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$ c. q. f. d.

236. *Observation.* En vertu de l'identité du rapport, du quotient et de la fraction, il est évident que l'on peut, sans troubler une égalité fractionnaire, multiplier ou diviser, soit les deux premiers termes, soit les deux derniers, soit les

(1) Lorsque les antécédents *ou* les conséquents de deux proportions sont égaux, les conséquents *ou* les antécédents sont en proportion.

quatre termes à la fois par un même nombre, comme aussi, multiplier ou diviser les deux premiers termes par un nombre, et les deux derniers par un autre nombre.

237. Théorème v. *On obtient une égalité fractionnaire quand on multiplie ou qu'on divise terme à terme un nombre quelconque d'égalités fractionnaires* (1).

Démonstration. Soient les égalités de fraction

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$
$$\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$
$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$$

Multipliant membre à membre on obtiendra

$$\frac{a\,c\,p\ldots}{b\,d\,q\ldots}=\frac{a'\,c'\,p'\ldots}{b'\,d'\,q'\ldots} \qquad (c.q.f.d.)$$

238. Corollaire i. *Lorsque quatre nombres forment une égalité fractionnaire, il en est de même des puissances semblables ou de même degré de ces nombres* (2).

Dans la dernière relation si l'on pose

$$a=c=p=\cdots \quad ; \quad a'=c'=p'=\cdots$$
$$b=d=q=\cdots \quad ; \quad b'=d'=q'=\cdots$$

et que l'on désigne par n le degré commun des puissances considérées de a, b, a' et b', il viendra

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{a'^n}{b'^n} \qquad (c.q.f.d.)$$

(1) Si l'on multiplie *ou* si l'on divise terme à terme un nombre quelconque de proportions, les produits *ou* les quotients sont en proportion.

(4) Lorsque quatre nombres forment une proportion, les puissances de même degré de ces nombres sont également en proportion.

239. Corollaire ii. *Lorsque quatre nombres forment une égalité fractionnaire, il en est de même des racines de même indice de ces nombres* (5).

C'est la propriété inverse de la précédente, et qui a nécessairement lieu.

240. On nomme, en général, *moyenne entre plusieurs grandeurs*, toute grandeur comprise entre la plus grande et la plus petite de celles que l'on considère.

De même tout nombre compris entre le plus grand et le plus petit de ceux que l'on donne est appelé *moyenne entre plusieurs nombres*.

Il y a une grande indétermination dans la fixation des moyennes ainsi définies, et dans chaque question particulière il faut examiner le sens précis à attacher à la moyenne.

241. Théorème vi. *Lorsque dans une égalité fractionnaire le deuxième et le troisième terme sont égaux, chacun d'eux est une moyenne entre les deux autres termes de l'égalité.*

Démonstration. De l'égalité

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

on déduit, selon que le rapport est plus grand ou plus petit que 1,

$$a > x > b, \quad \text{et} \quad a < x < b$$

la quantité x est donc bien, dans un cas comme dans l'autre, *comprise* entre les termes limites a et b.

Cette moyenne, *particulière et remarquable*, est appelée *moyenne par quotient* ou encore *moyenne factorielle*.

(1) Lorsque quatre nombres forment une proportion, les racines de même indice de ces nombres sont également en proportion.

242. Corollaire. *La moyenne factorielle entre deux nombres donnés est égale à la racine carrée du produit de ces nombres.*

De

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

On déduit (n° 222)

$$x^2 = ab, \quad \text{et} \quad x = \sqrt{ab}$$

(*c.q.f.d.*)

243. Théorème VII. *Lorsque* n *nombres sont inégaux, leur somme divisée par* n *est une moyenne entre ces nombres.*

Démonstration. Soient les nombres inégaux donnés

$$a, b, c, d.... l$$

rangés par ordre croissant de grandeur ; considérons la fraction

$$\frac{a+b+c+d+.... +l}{n}$$

et désignons-en la valeur par M

Il est clair que si l'on remplace chaque nombre par *a* et ensuite par *l*, on aura

$$\frac{na}{n} < \mathrm{M} < \frac{nl}{n}$$

ou

$$a < \mathrm{M} < l$$

M est donc bien une moyenne entre le plus petit et le plus grand des nombres donnés. (*c.q.f.d.*)

Cette moyenne particulière est appelée *moyenne différentielle* et quelquefois simplement *moyenne*

La *moyenne différentielle* entre 2, 3, 4, 5.. *n* nombres est donc égale à la

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ldots \qquad \frac{1}{n}$$

partie de leur somme

La moyenne des nombres 5. 9, 16 est donc

$$M = \frac{5+9+16}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

Théorème viii. *Entre deux nombres donnés, la moyenne différentielle est plus grande que la moyenne factorielle.*

Démonstration. Soient les deux nombres a et b, x leur moyenne par différence et M leur moyenne par quotient ; on a

$$x = ab$$

$$M = \frac{a+b}{2},\ \text{d'où}\ M^2 = \frac{(a+b)}{4}$$

On en déduit en développant le carré de $a+b$,

$$M^2 = \frac{a^2+b^2+2\,ab}{4}$$

ou

$$M^2 = \frac{a^2+b^2-2\,ab+4\,ab}{4} = ab + \frac{a^2+b^2-2\,ab}{4}$$

ou

$$M^2 = ab + \frac{(a-b)^2}{2}$$

M^2 est donc supérieur à ab ou à x^2, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

245. *Observation générale.* Nous n'avons pas parlé du rap-

port considéré sous le point de vue d'une différence ; maintenant l'on rejette hardiment cette acception, pour ne trouver dans un rapport que le quotient d'une division.

Anciennement, et quelquefois même encore aujourd'hui, on avait nommé ***équidifférence*** l'expression de l'égalité de deux excès ou différences ; de là, on déduisait quelques propriétés qui sont ***générales,*** en ce qu'elles appartiennent ***à toute égalité :*** le bon sens et la logique ont fait justice de pareille puérilité.

—

CHAPITRE III.

LES QUATRE OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS ORDINAIRES.

Addition. Fractions de même dénominateur, de dénominateurs différents; entiers joints à des fractions. — *Soustraction.* Fractions de même dénominateur, de dénominateurs différents; entiers joints à des fractions.—*Multiplication.* Définition générale.— Produit de deux fractions, d'un nombre entier par une fraction, d'une fraction par un nombre entier, de deux nombres fractionnaires. Produit d'un nombre quelconque de fractions. — Interversion des facteurs d'un produit de fractions. — Fractions de fractions. — Puissances d'une fraction. — Irréductibilité des puissances d'une fraction irréductible. — *Division.* quotient de deux fractions, d'un entier par une fraction, d'une fraction par un entier, de deux nombres fractionnaires. — Généralisation de la théorie des fractions ordinaires. — Expression fractionnaire dont les deux termes sont des fractions. — Constance de valeur d'une telle fraction par la multiplication ou par la division de ses termes par un même nombre entier ou fractionnaire. — Les règles des quatre opérations fondamentales des fractions à termes entiers s'appliquent aux expressions fractionnaires dont les termes sont des fractions.

ADDITION.

246. *L'addition est, en général, une opération qui a pour but de trouver un nombre renfermant toutes les unités et par-*

ties d'unités contenues dans deux ou plusieurs nombres donnés.

Cette opération peut présenter trois cas bien distincts :

1er CAS. *Les fractions à ajouter ont même dénominateur.*

Supposons par exemple que l'on ait à ajouter les fractions

$$\tfrac{5}{23} + \tfrac{11}{23} + \tfrac{8}{23} + \tfrac{7}{23}$$

Quel que soit le résultat, la somme sera multipliée par 23 si l'on multiplie chacune des fractions données (qui sont les parties de la somme), par 23 ; or comme on multiplie une fraction par un nombre; en divisant le dénominateur par ce nombre, le total sera alors

$$5 + 11 + 8 + 7$$

Mais ce total est 23 fois trop grand, donc

$$\frac{5}{23} + \frac{11}{23} + \frac{8}{23} + \frac{7}{23} = \frac{5+11+8+7}{23}$$

Ainsi l'on voit que

Pour additionner des fractions semblables, il faut à la somme des numérateurs donner le dénominateur commun.

247. 2e CAS. *Les fractions à ajouter n'ont pas le même dénominateur.*

On les réduit alors au même dénominateur, et l'on opère ensuite comme nous venons de le voir.

248. 3e CAS. Lorsque quelques-uns des additifs sont des nombres fractionnaires, on procède séparément à l'addition des nombres entiers et à celle des fractions ; on réunit ensuite les deux sommes obtenues.



Toutes les fois que le numérateur de la somme obtenue est plus grand que le dénominateur, on dégagera les entiers; la fraction obtenue sera simplifiée, s'il y a lieu.

Ainsi l'addition proposée a fourni

$$\frac{31}{23} = 1\frac{8}{23}$$

SOUSTRACTION.

249. *La soustraction est, en général, une opération qui a pour but de trouver combien d'unités et de parties d'unités il faut ajouter à l'un de deux nombres donnés, pour former l'autre.*

Trois cas sont à distinguer dans la soustraction fractionnaire :

1[er] cas. *Les fractions ont même dénominateur.*

Soit à effectuer la soustraction

$$\frac{11}{23} - \frac{5}{23}$$

dont nous représentons le reste par R; il faut que

$$R + \frac{5}{23} = \frac{11}{23}$$

Si nous multiplions par 23 les deux membres de cette égalité, il viendra

$$23\,R + 5 = 11$$

d'où

$$23\,R = 11 - 5$$

Et

$$R = \frac{11-5}{23}$$

D'où cette règle :

Pour soustraire des fractions semblables, à la différence des

numérateurs, il faut donner le dénominateur commun.

250. 2ᵉ cas. *Les fractions à soustraire n'ont pas le même dénominateur.*

On les réduit alors au même dénominateur, puis on opère comme nous venons de le voir.

251. 3ᵉ cas. Lorsque les nombres à soustraire sont composés d'une partie entière et d'une fraction, on procède séparément à la soustraction des fractions, puis à celle des parties entières; on réunit ensuite les deux différences obtenues.

Il pourrait arriver que la fraction à soustraire fût plus grande que la fraction de l'autre nombre : dans ce cas on transforme en fraction l'une des unités du plus grand des nombres donnés, ainsi qu'on le voit par l'exemple suivant,

$$11\tfrac{1}{5} - 4\tfrac{2}{3} = 11\tfrac{3}{15} - 4\tfrac{10}{15} = 10\tfrac{18}{15} - 4\tfrac{10}{15} = 6\tfrac{8}{15}$$

MULTIPLICATION.

252. La définition (nᵒ 42) dit que :

Le produit se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité,

ou en d'autres termes,

Le produit s'obtient en opérant sur le multiplicande, comme on opère sur l'unité pour avoir le multiplicateur.

Soit donc

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{5}{7}$$

Pour avoir le multiplicateur il a fallu prendre 5 fois la 7me partie de l'unité, et pour avoir le produit il faudra, en vertu de la définition, multiplier par 5 la 7me partie du multiplicande $\tfrac{2}{3}$.

Mais pour rendre d'abord 7 fois plus petite la fraction $\frac{2}{5}$, il faut multiplier le dénominateur par 7, ce qui donne

$$\frac{2}{5 \cdot 7}$$

Et comme ce premier résultat doit devenir 5 fois plus grand, il viendra enfin

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 7}$$

Donc :

Pour multiplier des fractions, on fait le produit des numérateurs, ainsi que celui des dénominateurs, et l'on donne le second produit pour dénominateur au premier.

253. Remarque i. Cette règle s'applique à tous les cas qui peuvent se présenter ; car si le multiplicande ou le multiplicateur est un nombre entier, on peut le considérer comme une fraction ayant ce nombre pour numératenr et 1 pour dénominateur.

Ainsi

$$8 \cdot \frac{5}{7} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8 \cdot 5}{7}$$

et

$$\frac{2}{3} \cdot 13 = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{1} = \frac{2 \cdot 13}{3}$$

254. Remarque ii. *Lorsque le multiplicateur est une fraction*, c'est-à-dire plus petit que 1, *le produit est plus petit que le multiplicande*, puisqu'il n'est qu'une fraction du multiplicande; c'est ce qui fait souvent dire que le produit de deux fractions est une *fraction de fraction.*

On voit donc qne si l'on demande les $\frac{5}{7}$ des $\frac{2}{5}$ de l'unité, il faudra multiplier ces deux fractions.

Lorsque le multiplicateur est plus grand que 1, le produit est plus grand que le multiplicande.

255. *Pour multiplier deux nombres fractionnaires, on transforme chacun de ces nombres en fractions à deux termes et l'on opère ensuite selon la règle* (252).

Exemple.

$$4\tfrac{3}{7} \cdot 8\tfrac{2}{9} = \tfrac{31}{7} \cdot \tfrac{74}{9} = \tfrac{31 \cdot 74}{7 \cdot 9} = \tfrac{2294}{63} = 36\tfrac{26}{63}$$

256. *Le produit de plusieurs fractions est le résultat que l'on obtient en multipliant la première fraction par la seconde puis le produit par la troisième et ainsi de suite.*

Ce produit est (n° 254), une fraction de fraction.

Pour former ce produit, *on multiplie les fractions terme à terme*

Supposons par exemple que l'on ait

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{5}{7} \cdot \tfrac{11}{13} \cdot \tfrac{17}{19}$$

Le produit sera

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19}$$

Avant d'effectuer le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs, il est indispensable, *pour simplifier les calculs*, de supprimer les facteurs qui pourraient leur être communs.

257. Théorème I. *La valeur du produit de plusieurs fractions et par suite d'un nombre quelconque de facteurs entiers ou fractionnaires, est indépendante de l'ordre des facteurs.*

Démonstration. Quel que soit l'ordre adopté, les deux termes du produit fractionnaire que l'on obtient seront composés des mêmes nombres entiers comme facteurs ; ces deux termes (n° 47) auront donc toujours même valeur. Le produit formé conserve donc la même valeur bien que l'on intervertisse d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

258. Corollaire. Ayant établi (n° 47), que l'ordre des fac-

teurs entiers d'un produit n'influe pas sur la valeur du produit, nous en avons déduit les propriétés n°s 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63; en nous appuyant sur (257), nous dirons aussi que toutes ces dernières sont encore applicables au cas des facteurs fractionnaires.

259. Théorème ii. *Pour élever une fraction à une puissance, il faut élever ses deux termes à cette puissance.*

Démonstration. On a *en général*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}\cdot\frac{a'''}{b'''}\dots=\frac{a\cdot a'\cdot a''\cdot a'''\dots}{b\cdot b'\cdot b''\cdot b'''\dots}.$$

Si nous posons

$$a = a' = a'' = a''' = \dots$$
$$b = b' = b'' = b''' = \dots$$

et que nous désignons par n le nombre de *fractions facteurs*, il viendra :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

260. Théorème iii. *Toute puissance d'une fraction irréductible est elle-même irréductible.*

Démonstration. Nous avons vu (n° 156) que les nombres a et b étant premiers entr'eux, il en est de même de leurs puissances quelconques; a^n et b^n sont donc deux nombres premiers, et la fraction

$$\frac{a_n}{b^n}$$

est irréductible. (*c.q.f.d.*)

261. Corollaire. *Un nombre quelconque ne peut être une puissance d'une fraction irréductible.*

En effet, si K étant entier, l'on pourrait avoir

$$K = \frac{a^n}{b^n}$$

il faudrait que la simplification de $\frac{a^n}{b^n}$ fût possible.

—

DIVISION.

262. Nous avons vu (n° 76) que *la division a pour but de déterminer l'un des facteurs d'un produit donné dont on connait l'autre facteur.*

On a donc en général, et quels que soient les termes de la division,

$$\textit{Dividende} = \textit{Diviseur} \cdot \textit{Quotient}$$

Soit l'opération

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{5}{7}$$

En représentant par q le quotient, on a

$$\tfrac{5}{7} \cdot q = \tfrac{2}{3}$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{7}{5}$, c'est-à-dire par le *diviseur renversé*, il viendra :

$$\tfrac{7}{5} \cdot \tfrac{5}{7} \cdot q = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{7}{5}$$

d'où

$$q = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{7}{5}$$

On déduit de là que:

Le quotient de deux fractions est égal au produit du dividende par le diviseur renversé.

263. Remarque I. Cette règle convient à tous les cas de divi-

sion; car si le dividende ou le diviseur est entier, on peut le considérer comme une fraction ayant 1 pour dénominateur.

Ainsi

$$2 : \frac{3}{7} = \frac{2}{1} : \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3}$$

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3 \cdot 5}$$

264. Remarque II. *Lorsque le diviseur est une fraction proprement dite, le quotient est plus grand que le dividende;* car il est égal au dividende multiplié par un nombre plus grand que 1.

De même on verrait que *si le diviseur est plus grand que* 1, *le quotient est plus petit que le dividende.*

265. Pour diviser deux nombres fractionnaires, on transforme chacun de ces nombres en fraction à deux termes, et l'on opère ensuite selon la règle (262).

Exemple.

$$5\frac{3}{7} : 3\frac{2}{5} = \frac{38}{7} : \frac{17}{5} = \frac{38 \cdot 5}{7 \cdot 17} = \frac{190}{119} = 1\frac{71}{119}$$

266. *Généralisation de la théorie des fractions ordinaires.* Le quotient de deux nombres entiers peut être représenté par une fraction ayant pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur; on applique souvent cette notation à des nombres qui ne sont pas entiers.

D'après cela on écrit,

$$\frac{3}{7} : \frac{5}{8} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}}$$

Et l'on donne la dénomination de fraction à de semblables quotients, parce qu'une telle expression fractionnaire peut toujours être ramenée à celle d'une fraction dont les deux termes sont entiers : en effet, le quotient précédent donne

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{24}{35}$$

267. Il est indispensable de faire voir que les principes fondamentaux du calcul des fractions à termes entiers s'appliquent complètement au calcul des fractions dont les termes sont des fractions.

THÉORÈME IV. *Une fraction ne change pas de valeur en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.*

Démonstration. Soit la fraction

$$\frac{a}{b}$$

dont les deux termes sont *quelconques*, ainsi que le facteur k que l'on introduit :

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Comme $\frac{a}{b}$ *revient* à une fraction dont les termes sont entiers, soit q sa valeur (q étant quelconque) ; nous avons donc

$$a = q \cdot b$$

En multipliant de part et d'autre par k, il viendra :

$$a k = q \cdot b \cdot k$$

ou en vertu du principe (n° 57) généralisé au (n° 258),

$$a k = q \cdot (b \cdot k)$$

D'où

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = q \qquad \text{(c.q.f.d.}$$

Le retour de $\frac{ak}{bk}$ à $\frac{a}{b}$ établit la constance de valeur de la fraction dans le cas de la division des deux termes par k.

268. *Observation.* Ce théorème permet de passer à la réduction au même dénominateur pour des fractions dont les termes sont quelconques, absolument d'après le même mode

d'opérations que pour les fractions à dénominateurs entiers.

L'extension des règles de l'addition et de la soustraction des fractions à termes entiers est donc établie.

269. Théorème v. *Le produit de deux fractions est égal au quotient du produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.*

Démonstration. Soient les fractions à termes quelconques,

$$\frac{a}{b} = q \,, \quad \frac{a'}{b'} = q'$$

D'où

$$a = b.q$$

$$a' = b'.q'$$

Multipliant, membre à membre, ces deux égalités nous obtenons

$$a \,.\, a' = b \,.\, q \times b' \,.\, q'.$$

Les principes généralisés au (n° 258) permettent d'écrire

$$a \,.\, a' = b \,.\, b' \times q \,.\, q'$$

D'où

$$\frac{a \,.\, a'}{b \,.\, b'} = q \,.\, q' \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

270, Théorème vi. *Le quotient de deux fractions est égal au produit du dividende par le diviseur renversé.*

Démonstration. D'après les notations du théorème précédent, on a

$$a = b\,q$$

$$b'\,q' = a'$$

Multipliant, membre à membre, on aura

$$a\,.\,b' \times q' = a'\,.\,b \times q$$

D'où

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{q}{q'}$$

et

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{q}{q'}$$

CHAPITRE IV.

—

LES QUATRE OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES.

—

Ecriture de zéros à la droite d'une expression décimale. — Moyen de multiplier ou de diviser une expression décimale par une puissance de 10; cas où le nombre de chiffres est insuffisant. — Addition et soustraction des fractions décimales. — Multiplication, règle générale; cas particulier où le nombre des chiffres du produit n'est pas suffisant pour appliquer la règle pratique. — Division; quatre cas.

271. Théorème I. *Une expression décimale ne change pas de valeur, en écrivant ou en supprimant un ou plusieurs zéros à sa droite.*

Démonstration. L'ordre, et par suite la valeur des unités qu'un chiffre représente ne dépend (30) que de la position de ce chiffre par rapport à la virgule.

On voit donc que

$$7,89 = 7,890000$$
$$5 = 5.00 = 5,000000$$

Ce dernier exemple montre que l'on peut considérer un nombre entier comme un nombre décimal, ayant pour chiffres décimaux autant de zéros que l'on veut.

Remarque. Ce théorème permet de donner le *même nombre de chiffres décimaux* à des expressions décimales quelconques ; c'est la transformation qui remplace au besoin la réduction au même dénominateur.

272. Théorème ii. *On multiplie ou l'on divise un nombre décimal par* 10, 100, 1000, *etc.*, *en transportant la virgule de* 1, 2, 3, *etc. rangs vers la droite ou vers la gauche.*

Démonstration. En effet, en opérant ainsi, les unités que représente chaque chiffre deviennent 10, 100, 1000, etc., fois plus grandes ou plus petites

273. Remarque. Il peut arriver que le nombre proposé ne renferme pas assez de chiffres soit à droite, soit à gauche, c'est-à-dire n'ait pas assez de chiffres décimaux ou entiers, pour que l'opération indiquée puisse s'effectuer immédiatement.

Qu'il s'agisse, par exemple, de multiplier ou de diviser par 100000 le nombre

$$3,65$$

1° Pour la multiplication on donnera à ce nombre la forme

$$3,65000$$

en écrivant à sa droite autant de zéros décimaux qu'il y a d'unités dans la différence du nombre de ses chiffres décimaux au degré de la puissance de 10 *introduite par multiplication ;* et dès lors on aura :

$$3,65 \cdot 100000 = 365000$$

2° Pour la division, on passera à la forme

$$000003,65$$

en écrivant à la gauche du nombre donné autant de zéros qu'il

y a d'unités, plus une, dans la différence du nombre des chiffres entiers au degré de la puissance de 10 *par laquelle on divise;* et ainsi l'on obtient :

$$3{,}65 : 100000 = 0{,}0000365$$

—

ADDITION.

274. Soit proposé d'ajouter les nombres 24,5078 ; 6,584 ; 88,006974.

On dispose le calcul de manière que les unités de même nom se trouvent en colonne verticale :

	24,5078
	6,584
	88,006974
Total	119,098774

Le résultat d'une addition doit, avons-nous déjà dit, renfermer autant d'unités de chaque espèce qu'il y en a dans chaque additif; on devra donc, non-seulement ici, additionner les parties entières d'après la règle établie, mais il faudra encore, quant aux parties décimales, additionner les subdivisions de même nom de l'unité entière. On suivra, dans ces dernières additions. la même méthode que pour les nombres entiers, attendu qu'*il y a uniformité dans la génération décimale des unités entières et fractionnaires.*

On suit donc cette règle :

Pour additionner des nombres décimaux, on les écrit les uns en dessous des autres de manière que les unités numératives entières et fractionnaires de même nom se trouvent en colonne verticale, et l'on souligne le dernier additif. On opère

ensuite comme s'il s'agissait de nombres entiers, en allant de droite à gauche et par colonne verticale; la virgule sera placée au total dans la même colonne où elle se trouve dans les divers additifs.

—

SOUSTRACTION.

275. Soit proposé de retrancher 27,8965 de 54,71.

Le résultat d'une soustraction se compose, d'après la théorie qui en a déjà été offerte, des excès des divers chiffres du diminuende sur ceux de même nom du diminueur. On aura donc à suivre ici la même marche que pour les nombres entiers, partout où un chiffre de l'un des nombres a son correspondant dans l'autre; mais dans le cas contraire, c'est-à-dire quand *les nombres donnés n'ont pas le même nombre de chiffres décimaux*, on substitue par la pensée des zéros aux chiffres décimaux de l'un des nombres donnés qui pourraient ne pas se trouver dans l'autre.

On déduit de là cette règle :

Pour faire une soustraction décimale, écrivez le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que les unités numératives entières et fractionnaires de même nom se trouvent en colonne verticale ; soulignez le plus petit nombre. Opérez ensuite comme s'il s'agissait de nombres entiers, en ayant soin de mettre dans la différence une virgule à la place marquée par les virgules des nombres donnés : si l'un des nombres a moins de chiffres décimaux que l'autre, substituez par la pensée des zéros aux ordres qui peuvent manquer.

En opérant de cette manière on a :

	54,71
	27,8965
Reste	26,8137

MULTIPLICATION.

276. Soit à multiplier 89,5078 par 48,67.

En supprimant la virgule dans le multiplicande, ce facteur (n° 272) est multiplié par 10000, et en la supprimant dans le multiplicateur ce facteur est multiplié par 100. Or (n° 58) quand on multiplie l'un des facteurs d'un produit par un nombre, le produit est multiplié par ce nombre ; donc le produit, d'abord multiplié par 10000 et ensuite par 100, le sera par 1000000, puisque (n° 57) en multipliant un nombre successivement par plusieurs facteurs, on le multiplie par leur produit :

On obtient ainsi, après suppression des virgules,

$$895078 \cdot 4867 = 4356610626$$

Pour ramener ce produit à sa vraie valeur, il faut le diviser par 1000000, c'est-à-dire (n° 272) marquer par une virgule *six* chiffres décimaux.

On voit donc que :

Pour multiplier des nombres décimaux il faut opérer, en faisant abstraction de la virgule, et sur la droite du produit obtenu, marquer autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les facteurs.

277. Si le nombre des chiffres du produit n'est pas suffisant pour appliquer immédiatement cette règle, comme dans

$$0,0006 \cdot 0,08$$

On écrit (n° 273) à la gauche du produit entier 48, autant de zéros qu'il y a d'unités plus une dans la différence du nom-

bre de chiffres de 48 au nombre de chiffres décimaux du produit ; on aura ainsi

0000048

puis l'on place une virgule entre les deux premiers zéros de gauche, ce qui donne

$$0{,}0006 \cdot 0{,}08 = 0{,}000048$$

—

DIVISION.

278. Les quatre cas que nous allons examiner, peuvent rentrer dans une seule et même règle; mais nous croyons que la théorie d'une opération doit suivre le dispositif pratique *le plus simple* du calcul : *en général* alors la théorie porte avec elle un caractère de simplicité, d'élégance et d'utilité.

1[er] CAS. *Les deux termes de la division ont même nombre de chiffres décimaux.*

Soit à diviser 73,24 par 18,75.

En supprimant les virgules dans ces nombres, on les multiplie (n° 272) chacun par 100 ; ayant ainsi multiplié le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient (n° 86) n'a pas changé de valeur. On a donc

$$\frac{73{,}24}{18{,}75} = \frac{7324}{1875}$$

D'où en règle :

Pour diviser deux expressions décimales ayant même nombre de chiffres décimaux, il faut faire abstraction de la virgule, en opérant comme sur des nombres entiers.

279. 2e CAS. *Le dividende a moins de chiffres décimaux que le diviseur.*

Soit

$$\frac{73,2}{18,754}$$

Ce cas rentre dans le premier si l'on écrit à la droite du dividende autant de zéros décimaux complétifs qu'il en faut, pour donner au dividende autant de chiffres décimaux qu'au diviseur :

$$\frac{73,2}{18,754}=\frac{73,200}{18,754}$$

On voit donc que :

Pour faire une division décimale dont le dividende a moins de chiffres décimaux que le diviseur, il faut, par des zéros complétifs, donner aux termes de la division le même nombre de chiffres décimaux, et diviser ensuite en faisant abstraction de la virgule.

280. 3e CAS. *Le diviseur est un nombre entier.*

Soit

$$\frac{59,86731}{12}$$

Si l'on supprime la virgule du dividende, il est clair (no 84) que le quotient est multiplié par

$$100000$$

c'est-à-dire par l'unité précédée d'autant de zéros que le dividende a de chiffres décimaux ; le quotient entier de la division entière

$$\frac{5986731}{12}$$

devant être divisé par 100000, aura donc autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve au dividende.

Ainsi

Pour faire une division décimale, dont le dividende est entier, faites abstraction de la virgule, et sur la droite du quotient entier ainsi obtenu séparez autant de chiffres décimaux qu'il y en a au dividende.

4ᵉ cas. *Le dividende a plus de chiffres décimaux que le diviseur.*

Soit la division

$$\frac{73{,}2459}{18{,}76}$$

En avançant la virgule à la fois dans les deux termes, d'un même nombre de rangs, *d'autant de rangs par exemple que le diviseur a de chiffres décimaux*, le quotient ne change pas de valeur. Il vient ainsi la division

$$\frac{7324{,}59}{1876}$$

dépendant du 3ᵉ cas, et dont le dividende a autant de chiffres décimaux qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur.

On peut donc dire :

Pour faire une division décimale dont le dividende a plus de chiffres décimaux que le diviseur, faites abstraction de la virgule, et sur la droite du quotient entier ainsi obtenu, séparez autant de chiffres décimaux qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur.

282. *Observation générale sur le calcul des fractions décimales.* L'exposition de ce chapitre repose entièrement sur la

numération décimale des fractions, et sur l'unique loi qui lie entr'eux les multiples et sous-multiples décimaux de l'unité entière. Souvent on procède en transformant les nombres décimaux en fractions ordinaires équivalentes, à l'aide des deux règles ou principes (n° 34) : cette marche, très-méthodique, nous a paru moins simple encore que celle que nous avons employée ; d'ailleurs la théorie précédente et celle par réduction en fraction ordinaire, ne diffèrent que par la forme.

En effet, puisque

$$6{,}2834 = \frac{62834}{10000}$$

On peut aussi dire que *si l'on fait abstraction de la virgule*, dans le nombre 6,2834 *on devra ensuite diviser par* 10000. Nous avons évité cette transformation parce que nous sommes convaincus, par l'expérience, que la forme *décimale explicite* se présente avec beaucoup plus de simplicité.

EXERCICES.

1. Réduire à leur plus simple expression les fractions suivantes :

$$\frac{60}{144},\ \frac{58}{154},\ \frac{88}{962},\ \frac{2225}{3115},\ \frac{8564}{11951},\ \frac{18073}{248935},\ \frac{7007}{274899},\ \frac{256400}{337807}.$$

2. Réduire au même dénominateur les fractions suivantes :

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\right);\ \left(\frac{3}{5},\ \frac{9}{17}\right);\ \left(\frac{5}{7},\ \frac{13}{23},\ \frac{15}{29}\right);\ \left(\frac{5}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{8}{19},\ \frac{17}{38}.\right)$$

3. Réduire au dénominateur commun le plus petit possible les fractions suivantes :

$$\left(\frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \frac{17}{20}, \frac{5}{21}, \frac{13}{35}, \frac{23}{45}\right) \quad ; \quad \left(\frac{11}{16}, \frac{23}{18}, \frac{17}{24}, \frac{37}{54}, \frac{19}{60}, \frac{59}{90}\right)$$

$$\left(\frac{19}{20}, \frac{15}{28}, \frac{13}{40}, \frac{257}{56}, \frac{89}{63}, \frac{211}{144}\right).$$

4. Quelle est la plus grande des deux fractions

$$\frac{574}{751} \text{ et } \frac{585}{1171}$$

5. *Théorème.* m, n, p, q étant des nombres entiers quelconques que les égalités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{ma + nb}{pa - qb} = \frac{mc + nd}{pc - qd}$$

sont des conséquences l'une de l'autre.

6. *Théorème.* Si les quatre termes d'une égalité fractionnaire sont écrits par ordre croissant, la somme des extrêmes est plus grande que la somme des moyens.

7. Peut-on former une égalité fractionnaire avec les quatre nombres

$$\frac{32}{7}, \frac{5}{19}, 15, \frac{455}{718}$$

8. *Théorème.* Dans toute suite fractionnaire, le rapport de la suite est égal à celui de la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs à la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs.

9. Dans quel cas peut-on ajouter, terme à terme, deux

égalités fractionnaires de manière à avoir une nouvelle égalité de fractions.

10. *Théorème.* Dans toute égalité fractionnaire le rapport des numérateurs ou des dénominateurs est égal à celui de la somme des deux premiers termes, augmentée ou diminuée de leur moyennę factorielle, à la somme des deux derniers, augmentée ou diminuée de leur moyenne factorielle.

C'est-à-dire que si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Il faut démontrer que

$$\frac{a+b\pm\sqrt{ab}}{c+d\pm\sqrt{cd}}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

11. Partager un nombre a en deux parties dont le rapport soit r.

12. Peut-on ajouter ou soustraire un même nombre de quatre termes d'une égalité fractionnaire, sans troubler l'égalité ?

13. Quels sont les sommes des expressions

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9},$$

$$4\frac{7}{8}+8\frac{5}{9}+\frac{15}{17}+\frac{11}{12}+\frac{13}{20},$$

$$14\frac{13}{36}+\frac{29}{45}+41\frac{13}{29}+18\frac{11}{15}.$$

14. Une fontaine doune trois litres d'eau en 4 minutes ; une autre 9 litres en 7 minutes ; et une troisième 11 litres en 3 minutes. Combien en donnent-elles en 1 minute, si elles coulent toutes ensemble.

15. Une place a trois écluses pour remplir d'eau son fossé : la première le remplirait en 4 heures, la seconde en 5 et la troisième en 8 : on demande en combien de temps le fossé serait rempli, si les trois écluses allaient cnsemble.

16. Quel cst le nombre dont les $\frac{3}{4}$, les $\frac{5}{6}$ et les $\frac{7}{9}$ égalent 595.

17. Quelles sont les différences pour les expressions :

$$\frac{34}{179} - \frac{38}{389},\ 5\frac{2}{3} - \frac{7}{4},\ 9 - \frac{3}{5},\ 7\frac{2}{9} - 5\frac{11}{13}$$

$$32 + \frac{5}{91} - \left[6 + \frac{9}{41^2}\right] - \left[\left(17\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{70}\right] + \left[2 + \frac{74}{13^3}\right]$$

18. Un courrier fait 13 lieues en 4 hcurcs, un autre fait 17 en $4\frac{2}{3}$ heures. Quel est celui qui marche le plus vite et que fait-il de plus par heure ?

19. Deux fontaines alimentent un bassin : l'une le remplit en 5 heures, et l'autre en 6 ; mais ce bassin a deux conduits d'écoulement, dont le premier le vide en 8 heures, et le second en 10.

Le bassin est aux $\frac{2}{3}$, et l'on demande quel est le temps nécessaire pour qu'il soit complètement rempli lorsque les quatre ouvertures sont ouvertes à la fois.

20. La différence du cinquième et du nenvième d'un nombre que l'on demande est $12\frac{4}{45}$.

21. La somme de deux nombres est $61\frac{3}{7}$ et les $\frac{23}{31}$ de l'un sont égaux à 17. On demande ces nombres.

22. Le tiers et le cinquième de la somme que j'ai, sont égaux à cette même somme diminuée de 7. Combien ai-je ?

23. Les $\frac{2}{3}$ d'un nombre, que l'on demande, forment l'excès sur 64 des $\frac{5}{7}$ et du $\frac{1}{5}$ de ce même nombre.

24. Si j'avais les $\frac{2}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ du quadruple de ce que j'ai, j'aurai 17 francs de plus. Quelle somme ai-je ?

25. Diophante passa la sixième partie de son existence dans l'enfance, et la douzième dans la jeunesse ; il se maria et passa dans cette union la septième partie de sa vie augmentée de 5 ans, avant d'avoir un fils auquel il survécut de 4 ans, et qui n'atteignit que la moitié de l'âge auquel son père parvint. Quel âge avait Diophante lorsqu'il mourut.

26. Faire les multiplications suivantes :

$$\frac{3}{22} \cdot \frac{7}{13}, \frac{2}{22} \cdot \frac{11}{21}, \frac{8}{7} \cdot \frac{17}{5}$$

$$5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{12}{29} \cdot 6, \frac{2}{3} \cdot 6\frac{3}{8}$$

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{11}{42} \cdot 8\frac{4}{7} \cdot 16\frac{3}{4} \cdot 8\frac{5}{3}.$$

$$\frac{25}{19}\left(\frac{17}{23} + \frac{13}{4} \cdot \frac{8}{7}\right) + \frac{11}{3}\left(2\frac{3}{16} - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

27. Quelle est le tiers des quatre cinquièmes de $\frac{3}{7}$?

28. Quel est le prix de $\frac{4}{7}$ de mètre de soie, à 27 francs le mètre.

29. Une fraction est telle qu'en y ajoutant $\frac{1}{2}$, elle vaut les $\frac{4}{5}$ de ses $\frac{11}{12}$. Quelle est cette fraction.

30. Une femme avait une certaine quantité d'œufs ; de cette quantité, et sans en casser, elle en vend le $\frac{1}{3}$ plus les $\frac{2}{3}$ d'un œuf; elle en donne le $\frac{1}{6}$ plus 3 œufs $\frac{1}{3}$; elle en mange $\frac{1}{4}$, et il lui en reste le $\frac{1}{7}$, plus 6 œufs $\frac{5}{7}$. Combien avait-elle d'œufs.

31. Quelqu'un ayant un verre de vin, en boit le $\frac{1}{3}$; son voisin par plaisanterie, le lui remplit avec de l'eau ; on en boit encore le tiers ; et l'on continue à remplir avec de l'eau chaque fois que le $\frac{1}{3}$ du verre est bu. On désire savoir quelle est la quantité de vin qu'on aura bu après 5 opérations.

32. D'un panier de poires, la marchande vend :

1° La moitié et une poire par dessus le marché.

2° La moitié du restant et une poire par dessus le marché.

3° La moitié du nouveau reste et une poire et demie de surplus.

Il reste ainsi 4 poires et l'on demande le nombre de poires que contenait le panier.

33. Un objet qui coûtait 7242 frs a été revendu les deux tiers de cinq fois ce qu'il a coûté. Combien a-t-on gagné.

34. D'une certaine somme on dépense les $\frac{4}{5}$, puis on gagne 340, et l'on trouve ainsi que la somme primitive est augmentée d'un tiers. Quelle est cette somme.

35. Deux joueurs vont à la banque : le premier y perd les deux tiers de son argent, le deuxième les trois quarts ; il se trouve que le premier a alors 15 francs de plus que le second. Quelle somme chaque joueur avait-il d'abord.

36. La somme de deux nombres est 425, et leur différence est égale au tiers du plus grand. On demande quels sont ces nombres.

37. Une marchande a acheté des poires qui lui reviennent à 5 pour 2 centimes ; en les revendant 4 pour 3 centimes, elle a gagné 370 centimes sur son marché. Combien a-t-elle vendu de poires?

38. Un jardinier veut apporter 15 poires en ville; mais il doit passer par deux portes, et il sait qu'à la première on lui enlèvera la moitié de ses fruits, et le quart du reste à la seconde. Combien devra-t-il cueillir de poires.

D'un tonneau qui contient 150 litres de vin, on tire 5 litres que l'on remplace par 5 litres d'eau. Combien aura-t-on extrait de vin après 6 opérations de ce genre.

40. Trois compagnies d'ouvriers, qui se présentent pour faire un certain ouvrage, employeraient respectivement

chacune 40, 36 et 28 jours. On les enrôle toutes trois, et l'on demande quel sera alors le temps employé pour faire l'ouvrage entier?

41. Effectuez les divisions suivantes :

$$\tfrac{8}{11} : \tfrac{3}{7},\ \tfrac{5}{6} : \tfrac{15}{4},\ \tfrac{8}{21} : \tfrac{2}{3},\ 18 : \tfrac{3}{5},\ 7 : \tfrac{2}{5}$$

$$\tfrac{2}{9} : 5,\ \tfrac{16}{61} : 4,\ 4\tfrac{15}{33} : 5\tfrac{81}{111},\ 6\tfrac{8}{9} : 7\tfrac{1}{6}.$$

$$\frac{4\frac{5}{11}}{1\frac{7}{33}} : \frac{2\frac{3}{4}}{37\frac{8}{17}}$$

42. Quatre entrepreneurs emploient chacun à la confection d'un certain ouvrage, une portion de leurs ouvriers ; les ouvriers du premier peuvent faire l'ouvrage en 64 jours, ceux du second en 45, ceux du troisième en 60, et ceux du quatrième en 57. Le premier entrepreneur n'emploie que la moitié de sa troupe, le deuxième la totalité, le troisième le quart, et le quatrième le tiers. On demande en combien de jours l'ouvrage sera terminé.

43. Quelle fraction faut-il prendre de 240 pour avoir 15 fois le nombre dont $\frac{5}{6}$ valent les $\frac{2}{3}$ de 18.

44. Combien faudrait-il d'une toile à $\frac{5}{6}$ de large pour doubler 420 mètres d'étoffe à $\frac{7}{8}$ de large.

45. On a pris 32 litres d'un mélange composé de 30 litres d'eau et de 50 litres de vin. Combien y a-t-il encore de vin pur.

46. Partager 690 en trois parties, dont les rapports soient ceux de $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$.

47. Deux courriers dont le premier fait 7 lieues en 2 heures et le second 4 lieues en $2\frac{1}{3}$ heures partent de deux villes en allant à la rencontre l'un de l'autre. On demande à quel point de la route ils se rencontreront, sachant que la distance des deux villes est de 135 lieues, et que le second courrier est parti $2\frac{1}{2}$ heures avant le premier.

48. Un entrepreneur a promis de terminer certains travaux en 13 jours, à condition d'avoir 90 ouvriers à sa disposition; mais au moment de commencer on ne peut lui en donner que 50. Combien de jours supplémentaires faudra-t-il accorder à l'entrepreneur?

49. Six nombres ont entr'eux et consécutivement les rapports des nombres

17, 13, 11, 9, 5 et 3.

La somme du premier et du dernier est $104\frac{1}{2}$; déterminer ces nombres.

50. Il est midi; à quelle heure se fera la prochaine rencontre des aiguilles. — Même problème pour une heure quelconque.

51. Les aiguilles des heures, des minutes et des secondes, marquent midi; combien de rencontres, deux à deux de ces aiguilles, auront lieu en 24 heures.

52. Une compagnie de partisans se partage le montant du butin qu'ils ont fait dans une campagne.

Il arrive que le capitaine prend $\frac{1}{4}$ de la totalité; le lieutenant $\frac{1}{3}$ de ce qui reste; les deux sous-lieutenants chacun $\frac{1}{3}$ de ce qui reste; les 74 soldats, chacun $\frac{1}{25}$ de la part d'un des sous-lieutenants : de cette manière si chaque soldat avait $16\frac{1}{3}$ francs de plus, la somme qui reste après le partage ne serait que la millième partie de ce qui reste réellement. Quel est le montant du butin?

53. Un renard poursuivi par un lévrier a 60 sauts d'avance. Il en fait 9 pendant que le lévrier n'en fait que 6; mais 3 sauts du lévrier en valent 7 du renard. On demande combien le lévrier doit faire de sauts pour atteindre le renard.

54. Le testament d'un oncle porte que chacun de ses neveux aura 12000 frs, et chacune de ses nièces 9000 frs, sur la

somme de 120000 frs qu'il leur laisse après sa mort. Par cette disposition il ne reste rien de cette somme. Si au contraire chaque nièce avait eu 12000 frs et chaque neveu 9000 frs, il serait resté 9000 frs. Trouver le nombre des neveux et des nièces.

55. Un père a 49 ans et son fils en a 11. Quand l'âge du père ne sera-t-il plus que le triple de celui de son fils?

56. Un père veut par son testament, que ses trois fils partagent son bien de la manière suivante : l'aîné 3000 frs de moins que la moitié de tout l'héritage ; le second 2400 frs de moins que le tiers de tout le bien ; le troisième 1800 frs de moins que le quart du bien. Quel était le bien du père et quelle est la part de chaque héritier?

57. Un courrier faisant 5 lieues en 2 heures était parti de Paris depuis 9 heures lorsqu'on a envoyé après lui un autre courrier qui faisait 11 lieues en 3 heures. On demande à quelle distance celui-ci a rejoint le premier?

58. Un père partage son bien entre ses quatre enfants : il donne au premier 15000 frs et la moitié de ce qui restera ; au deuxième, 20000 frs et le $\frac{1}{3}$ de ce qui reste, après avoir prélevé la part du premier et les 20000 ; au troisième, 25000 frs et le $\frac{1}{4}$ de ce qui restera, après avoir prélevé la part des deux premiers et les 25000 frs. Enfin le quatrième doit avoir 18000 frs qui resteront après les trois premiers paiements effectués. Quel est le bien du père ; quelles sont les trois premières parts ?

59. Une dame entre dans une église avec un certain nombre de pièces de 2 frs ; elle donne aux pauvres autant de sous qu'elle a de pièces ; Dieu change celles qui lui restent, après l'aumône faite, en pièces de 5 frs ; la dame dépense 7 de ces dernières pièces, et rentre chez elle avec le double de ce qu'elle avait d'abord. Combien avait elle en entrant dans l'église?

60. Partager 60 en deux parties de manière que la septième partie de l'une soit égale à la huitième partie de l'autre.

61. Faites les additions suivantes :

0,0006804	2,034085
7,4508	13,704897
0,006974	0,086734
88,04306	0,020318
	9,504739

62. Faire les soustractions suivantes :

74,810065	608,005
27,939208	89,238974

63. Faire les multiplications :

4567,01336 · 98,648

0,000021987 · 0,00000001372

64. Faire les divisions :

$$\frac{26,957}{7,738}, \frac{57,886}{9,87652}, \frac{3851,26947}{341}, \frac{58,860249}{6\,931}$$

65. Un marchand ayant acheté les $\frac{7}{8}$ d'une pièce de drap, à raison de fr. 56,84 le mètre, cède les 0,9 de son achat à l'un de ses confrères, qui lui rembourse 3300 frs ; de cette manière, ce qu'il avait déboursé lui rentre et il gagne 136 frs sur son marché, ainsi que le drap qui lui reste. Combien a-t-il gagné et combien y avait il de mètres dans la pièce ?

66. Une fruitière a acheté 600 fagots à raison de 65 frs le cent, et on lui en a livré 13 pour 12, sachant qu'elle les a revendus frs 0,80 pièce, on demande combien elle a gagné par fagot.

67. On m'a triplé trois fois la somme que j'avais ; à chaque fois j'ai dépensé 3 frs, et il me reste frs 10 14. Quelle somme avais-je?

68. Un maître promet à son domestique, en le prenant a

son service, frs 248,60 par an et un habit. Il le renvoie au bout de 9 mois en lui en donnant 155 et en lui laissant l'habit. On demande le prix de l'habit.

69. Un ouvrier, chaque jour qu'il travaille, gagne frs 3,50, et qu'il travaille ou non, il dépense frs 2,25 ; au bout d'un mois, s'il eût reçu 75 c. de plus, il aurait eu de quoi subvenir à ses dépenses pendant trois autres jours. Combien avait-il travaillé de jours ?

70. Un officier, chargé de conduire 120 conscrits à leur destination, reçoit en partant 2700 frs pour payer ses hommes à raison de 15 c. par lieue. En route une partie de la troupe déserte ; pour faire le décompte, il commence par retirer de la somme qu'on lui a remise la moitié de ce qui était dû aux déserteurs ; et en partageant le reste de cette somme également entre les hommes présents, il se trouve qu'ils ont chacun frs 24,75. On demande le nombre de lieues de marche, et celui des déserteurs.

71. Ne sachant que faire pour gagner sa vie, un pauvre diable achète 12 litres d'eau-de-vie à frs 2,50 pour la revendre en détail ; il achète en outre des verres, et établit sa boutique ; mais par malheur ces verres étaient trop grands puisqu'il n'y en avait que 20 dans un litre, et qu'il ne pouvait les vendre que 10 c. C'est pourquoi, au lieu d'avoir des verres plus petits, il met de l'eau dans son eau-de vie, et il en met tant que, quand il l'a toute vendue à 10 c. le verre il a gagné 20 frs. Combien a-t-il ajouté de litres d'eau.

72. Un ouvrier doit employer 25 jours pour faire un certain ouvrage ; mais les 15 derniers jours on est obligé de lui adjoindre un de ses camarades pour terminer.

On donne 210 frs pour l'ouvrage entier, et l'on demande de répartir cette somme entre les deux ouvriers, sachant que si le premier ouvrier eût fait tout l'ouvrage, il eut gagné frs 2,40 de plus par jour

73. Un détaillant a deux qualités d'eau-de-vie; la première qualité lui coûte frs 3,90 la bouteille : on ne sait pas ce que lui coûte la seconde; mais en vendant 7 bouteilles de la première il doit en vendre 10 de la seconde pour avoir la même somme. Il a mélangé deux barriques dont la première qualité contient $\frac{1}{4}$ de plus que la seconde.

On demande le prix de la bouteille du mélange, pour donner un gain égal au $\frac{1}{6}$ du prix coûtant.

74. Deux tonneaux contiennent une certaine quantité de litres de vin; le litre du premier vaut frs 1,20 et celui du second 1 fr. On prend 72 litres de l'un pour les remplacer par 72 litres de l'autre, et réciproquement ; alors le vin des deux tonneaux revient à frs 1,08 le litre.

75. Plusieurs jeunes personnes, en se promenant, achètent d'un jardinier tous les fruits d'un poirier pour frs 3,50; les poires cueillies, elles se les partagent également et veulent en prendre chacune 20; alors une d'entr'elles n'en ayant pas, elles n'en prennent que 18, et abandonnent les dix poires qui restent aux enfants du jardinier. On demande le nombre de poires, le prix d'une poire, et le nombre de jeunes personnes.

76. Les forces de deux ouvriers sont dans le rapport de 4 à 5. Quel sera le travail du second pour 10 mètres faits par le premier.

77. Un drap qui a $\frac{5}{6}$ de largeur revient à 48 frs le mètre, de quelle largeur sera un drap de même qualité et du prix de 36 frs le mètre.

78. 6000 hommes sont en garnison dans une ville de guerre, et ils ont du pain pour six mois, en donnant chaque jour une ration de 18 onces à chaque homme. En augmentant cette garnison de 1200 hommes on demande quelle sera la ration pour que la quantité de pain dure 10mois.

79 Une troupe de 20 ouvriers a creusé en 8 jours un fossé de 160 mètres de long, sur 2 mètres de large et sur 1 m 02 de profondeur : combien faudra-t-il de jours à une seconde troupe de 24 ouvriers pour creuser un fossé de 90 mètres de long sur 1 m 08 de large, et 1 m 06 de profondeur ?

80. 40 ouvriers ont gagné 1600 frs en 10 jours, en travaillant 10 heures par jour ; combien faudra-t-il que 25 ouvriers travaillent d'heures par jour pendant 6 jours pour gagner 550 frs ?

81. Un oncle laisse par testament 360000 frs à cinq neveux, à partager de manière que leurs parts soient dans le rapport inverse de leurs âges. Les héritiers ayant 30, 20, 18, 12 et 10 ans, on propose d'effectuer le partage.

82. Il faut 30 rouleaux de papier de $36^m,75$ de long sur $1^m,75$ de large pour deux appartements de 4 pièces. On demande combien il faudra de rouleaux de $24^m,5$ de longueur sur $1^m,5$ de largeur pour tapisser un seul appartement de 6 pièces.

Le rapport des longueurs des premières et deuxièmes pièces est celui de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$; le rapport des largeurs est celui de $\frac{3}{5}$ à $\frac{5}{7}$, et les hauteurs ont le rapport $\frac{3}{8}$ à $\frac{2}{5}$.

83. L'âge d'un père est le triple de celui de son fils ; ils ont 44 ans à eux deux, et l'on demande dans combien d'années l'âge du père ne sera plus que le double de l'âge du fils.

84. Quatre personnes doivent se partager 2205 frs de manière que quand la première aura 2 frs, la seconde en aura 3 ; quand la deuxième en aura 4, la troisième en aura 5 ; et quand la troisième en aura 6, la quatrième en aura 7. Combien en auront-elles chacune ?

85. La somme de trois nombres est 14250 ; le rapport du premier au troisième est égal à $\frac{4}{11}$, la différence de ces mêmes parties est 600. Déterminer ces nombres ?

—

LIVRE V.

PREUVES DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES

Caractères généraux d'une bonne preuve. — Addition ; preuve de gauche à droite, par 9 et par 3. — Soustraction ; preuves par addition, par soustraction ; preuves par 9 et par 3. — Multiplication, preuves par interversion, par division ; — Théorème général, — Preuves par 9, 11 et 3. — Division, preuve par multiplication et addition ; preuve par soustraction et multiplication ; preuve par division. — Théorème général ; preuves par 9, 11 et 3. — Remarque générale sur les preuves par 9, 11 et 3 ; simultanéité de preuves.

283. On appelle PREUVE *d'une opération, une autre opération destinée à établir*, autant que possible, *l'exactitude du résultat de la première.* La preuve d'une opération ne donne pas, en effet, de certitude à cet égard et ne fournit, par ses indications, qu'une probabilité plus ou moins forte : des erreurs de calcul peuvent se compenser, dans l'exécution de la preuve dans le même sens que celles qui auraient pu être commises par l'opération directe.

Un procédé de preuve sera recommandable toutes les fois qu'il décomposera, dans ses éléments, l'opération à contrôler, ou *qu'il reposera sur l'emploi d'une propriété que le calcul peut utiliser avec facilité et promptitude.* Nous n'indiquerons ici que des preuves de ces genres, en regardant comme *illu-*

soire, aux points de vue théorique et pratique, toute autre espèce de preuve.

—

ADDITION.

284. La théorie et la règle de l'opération, tant entière que décimale, donnent immédiatement l'idée de *refaire l'addition en opérant de gauche à droite ;* ne pouvant alors effectuer les reports d'une colonne à l'autre, on détermine l'un après l'autre ces reports par comparaison avec la somme à vérifier, et l'on suit la règle :

Additionnez de gauche à droite et cherchez l'excès du total ainsi obtenu dans chaque colonne sur la partie correspondante complète de même ordre d'unités du total à contrôler ; sous cette colonne écrivez cet excès, à la droite duquel par la pensée vous abaissez le chiffre de droite du total. De l'ensemble ainsi formé, soustrayez celui des nombres élémentaires additifs de même ordre : écrivez le reste sous la colonne de même nom, et continuez ainsi jusqu'à la colonne des unités dans laquelle vous trouverez ZÉRO *sous la ligne, si l'opération est exacte.*

Annexons à l'addition suivante le dispositif pratique de cette preuve :

	9862
	743
	5018
Total	15623
Preuve	1110

Le total ayant été formé par les sommes partielles des nombres élémentaires de même nom des divers additifs, il est clair que ce procédé de preuve, soustrayant successivement

ces diverses sommes partielles, doit conduire au reste 0. Cette manière d'opérer *décompose* réellement le total à vérifier; de plus il est assez peu probable que des erreurs commises, à un ordre élémentaire quelconque, puissent passer inaperçues, car en allant de gauche à droite les sommes partielles ont changé de formation par suite de l'absence des reports.

On dit donc ici :

9 et 5 font 14 dont la différence à 15 unités de mille du total est 1 ; on écrit 1 sous le chiffre 5 de mille. A la droite de ce reste 1 l'on abaisse par la pensée le chiffre 6 de centaines; cela donne 16 dont l'excès 1 sur 15 qui est la somme des centaines additives, se placera sous le chiffre 6.

De même on forme 12 en écrivant à la droite de ce second reste 1, le chiffre de dizaine de la somme; de 12 on retranche 11 qui est le total des dizaines, et l'on écrit le reste 1 sous le chiffre des dizaines.

A la droite de ce troisième reste 1 nous avons rétabli le chiffre 3 d'unités; et du nombre 13 ainsi formé si l'on soustrait le total partiel des unités on obtient 0 pour *reste* FINAL.

L'opération est donc exacte.

285. Nous avons vu (n° 99) que *le résidu d'une somme de parties par un même diviseur, est égal à celui de la somme des résidus des diverses parties.*

Si nous choisissons, par exemple, le diviseur 9 nous dirons que la somme des résidus par 9 des divers additifs doit être égale au résidu du total par 9.

Dans l'addition proposée la somme des résidus est

$$7 + 5 + 5, \text{ ayant } 8 \text{ pour résidu,}$$

Et 8 est aussi le résidu du total 15623.



286. Il est plus simple d'employer le nombre 3 comme diviseur, au lieu de 9; en effet les résidus par 3 des chiffres d'un nombre se lisent en même temps que le nombre, et aucun travail d'intelligence n'est nécessaire pour leur recherche.

Dans l'exemple étudié ci-dessus, la somme des résidus partiels est

$$1 + 2 + 2, \text{ ayant } 2 \text{ pour résidu}$$

Et 2 est aussi le résidu par 3 du nombre 15623.

287. *Simplification du procédé par* 3. Dans le but de simplifier encore davantage l'emploi de ce dernier procédé de preuve additive, on pourra, chaque fois que 2 se présente comme résidu, le remplacer par 3 — 1, et faire abstraction de 3 qui n'intervient pas dans le contrôle.

Ici l'on aurait alors

$$+1 - 1 - 1 \quad ou \quad -1$$

D'où l'on voit qu'en général et pour un nombre quelconque d'additifs, *on fera les sommes des résidus unitaires positifs et négatifs, l'on soustraira la plus petite somme de la plus grande;* le reste que l'on obtiendra ainsi aura pour résidu l'une des quatre formes

$$+1, \quad -1, \quad +2, \quad -2$$

Le résidu $+2$ revient à -1 en remplaçant 2 par $3-1$; et par le même changement on a

$$-2 = -(3-1) = -3+1$$

Le 3 du second membre n'influant pas sur le résidu final de vérification, la forme -2 revient à $+1$, de sorte que

les quatre formes précédentes se réduisent aux deux suivantes :

$$+1 \quad \text{et} \quad -1$$

Pour faire saisir l'avantage de ces preuves ainsi que leur usage et le dispositif adopté, considérons les deux exemples,

9862	+ 1		9862	+ 1	
743	— 1		745	+ 1	
5018	— 1		5020	+ 1	
6941	— 1	—5	6943	+ 1	7
566	— 1		568	+ 1	
89	— 1		91	+ 1	
6002	— 1		6004	+ 1	
29221	+ 1		29235	+ 1	

Dans la première addition, + 1 est le résidu du total 29221 ; la somme réduite des résidus unitaires est —5, dont le résidu est — 2 qui revient à la forme + 1

Dans la seconde addition, + 1 est encore le résidu de la somme 29235 ; et + 1 est aussi le résidu de la somme des résidus unitaires des additifs.

288. *Observation*. Les preuves additives par 9 et 3 sont supérieures à tout autre procédé tant sous le rapport de la promptitude, que sous celui de la simplicité des calculs qu'elles nécessitent.

289. Les procédés qui précèdent sont les mêmes pour les fractions décimales ; quant aux fractions ordinaires, et après la réduction au même dénominateur, on appliquera les mêmes preuves à la somme des numérateurs.

—

SOUSTRACTION.

290. Le diminuende est la somme du diminueur et du reste, ou en d'autres termes, le plus petit nombre et le reste sont les deux parties du plus grand. Telle est la définition générale de l'opération.

Il en résulte immédiatement deux procédés de preuves.

1° *Ajoutez le diminueur au reste ; le total devra être égal au diminuende.*

2° *Soustrayez le reste du diminuende ; la nouvelle différence doit être égale au diminueur.*

291. Les nombres 9 et 3 fournissent encore d'autres preuves très-utiles et très-simples, en s'appuyant sur le principe (n° 102), *pour un diviseur donné, le résidu de la différence de deux nombres est égal à la différence des résidus de ces nombres.*

Soit donc la soustraction

	8020
	2759
Reste	5261

Les résidus respectifs par 9 du diminuende, du diminueur et du reste sont 1, 5 et 5 ; comme le résidu 5 du diminueur est plus grand que le résidu 1 du diminuende, on ajoute 9 à ce dernier (en vertu du 2° cas du n° 102), et les trois résidus sont alors

10, 5, 5

Et l'on voit que *le premier de ces trois nombres est égal à la somme des deux autres.*

292. Si l'on raisonne, d'après le même principe (n° 102), sur le nombre 3, et que l'on ait la précaution de changer le résidu + 2 en — 1 et — 2 en + 1, on verra que la preuve fournit le détail pratique suivant :

	8020	1
	2759	— 1
Reste	5261	— 1

Les résidus respectifs des termes de la soustraction sont + 1 et — 1 et leur différence est + 2 qui appartient à la forme — 1, qui est aussi celle du reste : l'opération est donc bien faite.

—

MULTIPLICATION.

293. On sait que le produit conserve sa valeur quand on change l'ordre des facteurs; par conséquent *on fait la preuve d'une multiplication en intervertissant l'ordre des facteurs.*

On fait aussi la preuve d'une multiplication en divisant le produit par l'un des facteurs; *l'autre facteur doit former le quotient.*

Cette preuve se déduit de la définition de la division.

294. Théorème. *Pour un même diviseur, le résidu du produit de deux facteurs est égal à celui du produit des résidus de ces facteurs.*

Démonstration. Soient les facteurs A, B, et D le diviseur considéré; soient aussi R′ et R″ les résidus respectifs de A et B. On a évidemment

$$A = \dot{D} + R'$$

$$B = \dot{D} + R''$$

La multiplication, membre à membre, donne

$$AB = \dot{D} + R' R''$$

Actuellement il est clair que le résidu de A B est égal à la somme des résidus des parties $\dot{D}$ et R' R'' de cette somme; comme le résidu de $\dot{D}$ est nul, il s'en suit que les résidus de A B et R' R'' sont égaux. (c.q f.d.)

295. *Par rapport à 9. le résidu d'un produit est donc égal à celui du produit des résidus de ses facteurs.*

C'est là un bon procédé de preuve, et dont voici un exemple.

38078	8	48
8016	6	
305233248	3	3

8 et 6 sont les résidus des deux facteurs, le produit en est 48 dont le résidu est 3; or 3 est aussi le résidu du produit 305233248 à vérifier.

296. Toujours en vertu du théorème (n° 294), pour faire la preuve d'une multiplication par 11, on cherche les résidus par 11 du multiplicande et du multiplicateur; le produit de ces restes doit donner le même résidu que le produit des deux nombres proposés. Si cette vérification ne réussit pas l'opération est inexacte; mais le contraire n'est pas toujours vrai. Ce même théorème fournit, en général et pour un diviseur quelconque, le moyen de vérifier la valeur d'un produit.

297. Pour la multiplication nous préconisons aussi notre preuve par 3, qui fournit le détail suivant :

851	+ 2
643	+ 1
547193	+ 2

2 et 1, qui sont les résidus des facteurs, donnent 2 pour résidu de leur produit ; or 2 est aussi le résidu du produit 547193.

—

DIVISION.

298. La définition (nº 77) de cette opération fournit immédiatement cette preuve :

Au produit du quotient entier par le diviseur, ajoutez le reste ; vous devez avoir le dividende pour somme.

299. Il résulte aussi de là que *si l'on soustrait le reste du dividende, on pourra traiter et vérifier la différence obtenue comme le produit du diviseur par le quotient entier.*

300. Soient un nombre N, et son diviseur D, soient Q le quotient entier et R le reste. On aura

$$N = D.Q + R$$

Divisant successivement les deux membres par D et par Q, il viendra

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

$$\frac{N}{Q} = D + \frac{R}{Q}$$

Ces deux relations démontrent que D et Q se permutant comme diviseurs, Q et D se permutent comme quotients, *sans que le reste* R *change.* D'où l'on déduit :

Théorème. *Le reste d'une division ne change pas lorsque l'on prend pour diviseur le quotient entier que l'on avait d'abord obtenu.*

Il en résulte que :

Pour faire la preuve d'une division, il suffit de prendre le quotient pour nouveau diviseur; alors le reste doit être le même, tandis que le nouveau quotient doit être le diviseur primitif.

301. Théorème. *Dans toute division l'excès des résidus du dividende et du reste est égal au résidu du produit des résidus du diviseur et du quotient entier.*

Démonstration. Supposons les nombres A et B qui donnent le quotient entier Q et le reste R; on a

$$A = B \cdot Q + R$$

Si d est un nombre quelconque, et que a, b, q et r représentent respectivement les résidus, par ce nombre, de A, B, Q et R, il viendra :

$$\dot{d} + a = (\dot{d} + b)(\dot{d} + q) + (\dot{d} + r)$$

D'où après multiplication et simplification,

$$a - r = \text{résidu de } bq. \qquad c. q. f. d.$$

302. Si l'on remplace d par 9 ou mieux par 3, l'on a deux nouvelles preuves de division.

Ainsi soit

$$64345 = 89 \cdot 722 + 87.$$

Par 9, on aura

$$a = 4,\ b = 8,\ q = 2,\ r = 6.$$

D'où

$$a - r = -2, \quad \text{et} \quad bq = 16 = 18 - 2 = \dot{9} - 2$$

Le résidu de bq est donc aussi -2.

Par 3, on aura

$$a = 1,\ b = 2,\ q = 2,\ r = 0$$

Donc

$$a - r = 1\ ,\ bq = 4 = \dot{3} + 1.$$

$+ 1$ est donc aussi le résidu de $b\,q$.

Par 11, on aurait

$$a = 6,\ b = 1,\ q = 7,\ r = 10$$

Et

$$a - r = -4,\ bq = 7 = 11 - 4.$$

Le caractère est donc encore satisfait.

303. ***Remarque générale sur les preuves par* 9, 11 *et* 3.** Lorsque les conditions de ces preuves sont satisfaites, l'exactitude du résultat à vérifier n'est pas encore *incontestable :* en effet, l'erreur resterait inaperçue si dans le courant, ou dans le résultat de l'opération, s'étaient glissés,

1° Des 0 au lieu de 9 ou de 3.

2° Des chiffres trop forts ou des chiffres trop faibles, précisément du même nombre d'unités ; il y aurait alors une compensation qui masquerait complètement l'erreur.

En tous cas, et bien que le critérium de la preuve ait été satisfait, l'erreur, *s'il y en a une*, sera un multiple de 9, de 11 ou de 3. Il est bien vrai que le diviseur employé diminuant, les multiples de *l'erreur possible* se rapprocheront de plus en plus, et qu'ainsi le hasard pourrait *souvent* satisfaire aux conditions de preuve ; mais, d'un autre côté, plus le diviseur est petit et moins nombreuses sont les chances d'erreur dans l'exécution de la preuve ; d'ailleurs il ne faut pas oublier que l'*on n'est pas en droit de prononcer l'exactitude d'une opération dont* UNE *preuve a réussi*, et qu'il est

bon, *nécessaire* même, que *divers* procédés viennent se contrôler l'un l'autre pour augmenter la probabilité relative à la qualité du résultat à vérifier.

On pourrait croire, d'après cela qu'il serait convenable d'employer 2 et 5 comme diviseurs, attendu que les résidus correspondants s'obtiennent en ne considérant que les *seuls chiffres* d'unités des nombres combinés ; ce serait là une erreur, car *précisément* parceque ces résidus ne dépendent que du *seul chiffre* de droite de chaque nombre, les *autres chiffres* des opérations pourraient être modifiés d'une manière *quelconque*, et les résidus par 2 et 5 resteraient cependant les mêmes puisque les chiffres qui les fournissent n'auraient pas variés.

En général, *pour qu'un diviseur soit propre à un procédé de preuve, il faut que les résidus qu'il emploie soient faciles à déterminer; il faut de plus que ces résidus dépendent de* TOUTES *les parties des nombres considérés.*

Les preuves par 11 et par 3 étant essayées successivement constituent, pour chaque opération, un excellent contrôle réciproque ; quant au résidu par 11 nous conseillons, pour la plus grande facilité, de procéder par tranches de deux chiffres de droite à gauche. (Voir page 125, exercice 10).

EXERCICE.

THÉORÈME. Si l'erreur commise dans la multiplication de deux nombres provient de ce que le premier chiffre à droite de l'un des produits partiels n'a pas été écrit comme il convient sous le deuxième chiffre à droite du produit partiel précédent, la preuve par 9 ne pourra indiquer l'erreur. Examiner si les preuves par 11 et par 3 pourraient toujours mettre l'erreur en évidence.

LIVRE VI.

SYSTÈMES DE NUMÉRATION A BASE QUELCONQUE.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE NUMÉRATION.

Composition et forme générale d'un nombre entier dans un système à base quelconque. — Passages du système décimal à un système quelconque, et réciproquement. — Les quatre opérations *entières* pour la base B. — Passage direct d'un système à un autre. — Composition et forme générale d'une fraction pour un système à base quelconque.

304. Le système de numération dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, repose sur des lois conventionnelles, s'aidant de mots et de signes également convenus et admis.

Ces lois, ces mots et ces signes toujours en petit nombre, venant à être modifiés, on obtient divers systèmes de numération. En d'autres termes, on entend par *système de numération*, l'ensemble des lois, mots et signes destinés à l'énonciation et à la représentation des nombres.

On appelle *base* d'un système numératif le nombre qui (nº 12) indique combien il faut d'unités numératives d'un

ordre pour faire une unité numérative de l'ordre immédiatement supérieur : le système est *binaire*, *ternaire*, *quaternaire*. . . . . *décimal*, *unodécimal*, *duodécimal*, etc. , suivant que sa base est 2, 3, 4.... 10, 11, 12, etc. La base doit-être au moins égale à *deux*; car si l'on prenait *un* pour base, les unités numératives seraient toutes égales entre elles , et *il n'y aurait pas de système de numération.*

Le système dont la base est *dix* est universellement adopté, et nous en avons fait usage à l'exclusion de tout autre : toutefois la considération des divers systèmes de numération est souvent utile , et c'est pourquoi nous entrons dans l'exposition un peu détaillée de ce sujet.

La question de l'énonciation numérique n'a été traitée et résolue que pour le système décimal.

En général représentons par N un nombre quelconque et par B la base d'un système de numération ; de plus , soient $a, b, c, d.... p, q$ des nombres entiers plus petits que B, et N, un nombre entier *quelconque*.

305. Théorème. *Tout nombre entier* N *peut être représenté par la formule*

$$N = B^{n} q + B^{n-1} p + \dots + B^{2} c + B b + a$$

Démonstration. Nous supposons que N est plus grand que 1 ; le cas de N fractionnaire sera examiné plus loin. Divisons N par B et soient Q le quotient entier et a le reste; supposons encore $Q > B$, nous diviserons Q par B, et désignerons par Q' le nouveau quotient et par b le nouveau reste. Admettant encore, pour conserver la plus grande généralité, que Q' est plus grand que B et, qu'en divisant Q' par B, Q'' soit le quotient et c le reste; continuant ainsi ces divisions successives jusqu'à ce que l'on arrive à *un*

quotient moindre que B, et dont p est le reste, on obtiendra la série suivante d'égalités

$$N = BQ + a$$
$$Q = BQ' + b$$
$$Q' = BQ'' + c$$
$$Q'' = BQ''' + d$$
$$\vdots$$
$$Q^{(n-2)} = B.q + p$$

Multipliant la 2e égalité par B, la 3e par B^2, la 4e par B^3, etc., la n^e par B^{n-2+1} ou B^{n-1}, il viendra

$$N = B\ Q + a$$
$$B\ Q = B^2\ Q' + B\ b$$
$$B^2\ Q' = B^3\ Q'' + B^2\ c$$
$$B^3\ Q'' = B^4\ Q''' + B^3\ d$$
$$\vdots$$
$$B^{n-1}\ Q^{(n-2)} = B^n \cdot q + B^{n-2}\ p.$$

L'addition, membre à membre, de ces égalités et des réductions évidentes fournissent,

$$N = B^n q + B^{n-1} p + \ldots\ldots + B^3 d + B^2 c + Bb + a$$

(*c.q.f.d.*)

306. Ce théorème donne le moyen d'écrire tous les nombres possibles avec B caractères ou chiffres, dont l'un est

le *zéro* et dont les autres servent à désigner les $B - 1$ premiers nombres.

La convention commune à tous les systèmes de numération est que :

Tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités autant de fois plus fortes que la base contient d'unités simples.

Remarquons que les diverses unités numératives d'un système sont les puissances successives de la base, et sont représentées par

$$1, B, B^2, B^3, B^4, \ldots\ldots$$

Il est donc clair que, le nombre n représenté par la formule (nº 305) se compose de a unités premières, de b unités secondes, de c unités troisièmes, etc., de p unités du $(n-1)^{me}$ ordre et de q unités du n^e ordre ; et en vertu de la convention générale qui vient d'être établie, le nombre affectera la forme condensée

$$N = qp \ldots\ldots dcba$$

307. Si la base B est plus petite que 10, on peut employer les chiffres du système décimal comme chiffres du nouveau système.

Ces mêmes chiffres peuvent aussi être employés si B est plus grand que 10, mais il faut leur en adjoindre d'autres pour désigner les nombres dix, onze, etc., jusqu'à $B - 1$. Nous emploierons, à cet effet, les lettres de l'alphabet grec, α, β, γ, etc.

Disons encore que dans tout système de numération, les unités numératives successives sont représentées par

$$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, \ldots\ldots$$

308. Problème I. *Transporter un nombre du système décimal à un autre système dont la base est donnée.*



La solution de cette question consiste dans la recherche des différents caractéristiques a, b, c, d . . . . p, q du *théorème formulé* (n° 305).

On en conclut cette règle.

Pour transporter dans le système B *un nombre* N *du système décimal, il faut diviser ce nombre par cette base, et successivement par* B *les divers quotients jusqu'à ce que l'on en obtienne un qui soit plus petit que* B : *on écrit tous les restes de droite à gauche, à partir du premier, les uns à la suite des autres, pour terminer ainsi par l'écriture du dernier quotient.*

Exemple. Soit le nombre 731975 du système décimal, à écrire dans le système duodécimal ; voici le tableau des calculs.

```
731975|12
 119  |60997 |12
  117     99 |5083|12
    95     37  28 |423|12
    11      1   43  63|35|12
                    3 11| 2
```

Le nombre duodécimal demandé est par conséquent :

$$2\beta 3 7 1 \beta$$

309. Problème ii. *Transporter dans le système décimal un nombre écrit dans un système dont la base est donnée.*

Soit en général pour la base B le nombre

$$N = q\, p \ldots . d\, c\, b\, a$$

à traduire dans le système décimal. La solution de ce problème est évidente par elle-même : on formera les puissances successives de B, en nombre égal à celui des chiffres de N, et l'on multipliera ces diverses puissances par les chiffres

correspondants; la somme des produits ainsi formés sera la traduction demandée.

Donc :

Pour transporter dans le système décimal, un nombre écrit dans un système quelconque, il faut multiplier chaque chiffre du nombre donné par une puissance de la base, d'un degré égal au nombre de chiffres qui précèdent. La somme des produits ainsi effectués, dans le système décimal, sera le nombre cherché.

Exemple Soit le nombre duodécimal

$$2\beta 371\beta$$

On aura

$B^0 = 1$	$\beta \cdot 1 = 11$
$B = 12$	$1 \cdot B = 12$
$B^2 = 144$	$7 \cdot B = 1008$
$B^3 = 1728$	$3 \cdot B^3 = 5184$
$B^4 = 20736$	$\beta \cdot B^4 = 228096$
$B^5 = 248832$	$2 \cdot B^5 = 497664$
	Total 731975

310. Le mécanisme des opérations arithmétiques est nécessairement le même quel que soit le système de numération dans lequel on calcule; et les règles du système décimal s'exécutent de la même manière pour un système quelconque. Il est cependant indispensable de donner un exemple de chacune des opérations fondamentales.

Soit dans le système quinquennaire, l'addition

	2013411
	3102123
	211204
	1424033
Total	12311331

Dans la colonne des unités on trouve *onze* pour somme; or, cette somme comprenant 2 dizaines et 1 unité, on pose 1 et l'on reporte 2 à la seconde colonne, où l'on trouve ainsi *huit* dont on pose les 3 unités pour reporter 1 dizaine de cet ordre à la troisième colonne; on continuera ainsi de la même manière, et l'on obtiendra 12311331

311. Dans le système septénaire, on propose la soustraction

	5036421
	2646532
Différence	2056556

A la colonne des unités, le chiffre supérieur 1 étant moindre que le chiffre inférienr 2, on ajoute la base 7 à 1 et l'on a *huit*: retranchant 2 de 8 on obtient 6 qui est le premier chiffre du reste. On augmente de 1 le chiffre 3 inférieur et l'on a 4; puis l'on soustrait 4 de 7 + 2, ce qui donne 5, et ainsi de suite on obtient le reste 2056556

312. Dans le système dont la base est 9, faire le produit

```
   5467
    832
  12045
 17523
48202
5117475
```

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	11	13	15	17
3	6	10	13	16	20	23	26
4	8	13	17	22	26	31	35
5	11	16	22	27	33	38	44
6	13	20	26	33	40	46	53
7	15	23	31	38	46	54	62
8	17	26	35	44	53	62	71

On construira d'abord la table de produits élémentaires correspondante à la table décimale de Pythagore ; puis à l'aide de cette table on exécutera, d'après la règle ordinaire, la multiplication proposée.

313. Soit à faire la division suivante pour la base 9.

```
5120654 | 5467        5467.1 =  5467
48202   | 832         5467.2 = 12045
 20045                5467.3 = 17523
 17523                5467.4 = 24101
  14224               5467.5 = 30568
  12045               5467.6 = 36146
   2168               5467.7 = 42624
                      5467.8 = 48202
```

On effectuera d'abord la table des huit premiers multiples du diviseur 5467 ; ensuite on procédera à la division en suivant la méthode établie pour le système décimal.

On aura ainsi

$$\frac{5120654}{5467} = 832\,\frac{2168}{5467}$$

Toutes les opérations qui précèdent n'offrent aucune difficulté et ne demandent qu'une grande attention et beaucoup de pratique des calculs.

314. Problème iii. *Transporter un nombre* N *d'un système* B *à un autre système* B'.

Remarquons que dans la démonstration de la formule

$$N = B^n q + B^{n-1} p + \dots + B^2 c + Bb + a$$

B est quelconque ; on passera donc du système B à un autre système B', de la même manière que l'on passe du système décimal au système B. Seulement il est nécessaire de remarquer que, dans les opérations de divisions que nécessite ce passage, chaque reste n devra être multiplié par B, avant d'être joint au chiffre d'ordre inférieur.

Ainsi soit le nombre duodécimal

$$2\beta 3 7 1 \beta$$

et proposons-nous de l'écrire dans le système octaval (dont la base est 8). Voici le tableau des divisions.

```
2β371β|8
 33   |44β48 |8
  77    4β   |6751| 8
   31     34    75 | 9β1 |8
    5β      8    11  1β  |12α | 8
     7      0     5  71   6α | 1α | 8
                      5    2    6 | 2
```

Le nombre octaval cherché est donc

2625507



315. Lorsque la base du nouveau système est plus grande que celle du système donné, il faut préalablement la traduire dans ce dernier système, pour pouvoir exécuter les divisions successives.

Ainsi supposons qu'il s'agisse de retourner du nombre octaval 2625507 au nombre correspondant duodécimal : on écrira d'abord 12 sous la forme octavale 14, et l'on aura les divisions suivantes :

2625507	14				
122	167105	14			
125	27	11735	14		
15	131	73	647	14	
107	50	133	47	43	14
13	45	7	3	13	2

Le reste 13 étant du système 8 est égal à 11 dans le système duodécimal, et le nombre cherché est par suite

$$2\beta\,3\,7\,1\,\beta$$

316. Le problème aurait pu se résoudre évidemment, en passant d'abord au système décimal, ce qui eut fourni le nombre

731975

On aurait dû transporter ensuite ce dernier nombre dans le système duodécimal pour trouver $2\beta371\beta$. Mais c'est là une voie qui n'est guère si courte ni si élégante que la solution directe que nous avons donnée.

317. Considérons actuellement comme nous l'avons annoncé (nº 305), une fraction $\frac{D}{N}$ et proposons-nous de l'écrire dans le système B.

Multipliant N par B, et divisant le produit par D, désignons le quotient entier par Q et le reste par N_1 ; soient ensuite Q_1 et N_2 le quotient et le reste de la division de N_1 B par D : en continuant ces divisions successives jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste N_n *nul*, on aura cette suite d'égalités :

$$\frac{NB}{D} = Q_0 + \frac{N_1}{D}$$

$$\frac{N_1B}{D} = Q_1 + \frac{N_2}{D}$$

$$\frac{N_2B}{D} = Q_2 + \frac{N_3}{D}$$

$$\vdots$$

$$\frac{N_{n-1}\,B}{D} = Q_{n-1}$$

Ces égalités sont en nombre n; en les multipliant la première par B^{n-1}, la seconde par B^{n-2}, en général, l'une quelconque de rang i par B^{n-i}, et en particulier la dernière par B^{n-n} ou 1, il viendra par l'addition membre des égalités résultantes.

$$\frac{N}{D} \cdot B^n = Q_0 B^{n-1} + Q_1 B^{n-2} + Q_2 B^{n-3} + \dots + Q_{n-1}$$

D'où, en divisant les deux membres par B^n

$$\frac{N}{D} = \frac{Q_0}{B} + \frac{Q_1}{B^2} + \frac{Q_2}{B^3} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{B^n}$$



Il est facile de faire voir que les divers quotients sont inférieurs à B; considérons à cet effet l'égalité générale

$$\frac{N_i B}{D} = Q_i + \frac{N_{i+1}}{D}$$

qui donne

$$N_i B = D.Q_i + N_{i+1}$$

D'où

$$N_i B \overline{\gtrless} D\ Q_i$$

et

$$\frac{N}{D} \overline{\gtrless} \frac{Q_i}{B}$$

Mais $\frac{N}{D}$ est une fraction, donc *a fortiori*,

$$Q_i < B$$

La génération des fractions obéit donc à la loi générale

$$\frac{N}{D} = \sum \frac{Q_i}{B^{i+1}}$$

Telle est, pour un système quelconque, la génération parallèle à celle des fractions décimales; ce principe rend compte de toutes les circonstances particulières que présente la transformation des fractions ordinaires en fractions décimales.

—

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE
DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ.

Composition et forme générale d'un nombre par rapport à un nombre plus petit que sa base. — Lois de divisibilité par rapport à la base à la base augmentée ou diminuée de 1. — Applications aux systèmes à base 10, 100, 1000 et caractères divers de divisibilité décimale.

318. Soient B la base d'un système quelconque de numération, N un nombre entier écrit dans ce système et dont les chiffres sont $a, b, c, \ldots p, q$. Soit D un nombre entier quelconque plus petit que B, et R le reste de la division de B par D; on a donc

$$B = \dot{D} + R \qquad (1)$$

En faisant la seconde puissance de B; on aura

$$B^2 = \dot{D} + R^2 \qquad (2)$$

Prouvons qu'en général, n étant un nombre entier, l'on a

$$B^n = \dot{D} + R^n \qquad (3)$$

A cet effet, supposons que cela soit vrai pour la $(n-1)^{me}$ puissance, et qu'ainsi l'on ait

$$B^{n-1} = \dot{D} + R^{n-1} \qquad (4)$$

et démontrons que, dès cet instant, la même loi régit la n^{me} puissance de B.

Multipliant, membre à membre, les égalités (1) et (4) nous obtiendrons

$$B^n = (\dot{D} + R)(\dot{D} + R^{n-1}) = \dot{D} + R\dot{D} + R^{n-1}\dot{D} + \dot{R}^n$$

D'où

$$B^n = \dot{D} + R^n \qquad (c.q.f.d.)$$

319. Théorème i. *Tout nombre* N, *d'un système* B *de numération. par rapport à un nombre* D *plus petit que cette base et de résidu* R, *se compose suivant la loi générale*

$$N = \dot{D} + a + Rb + R^2c + R^3d + \dots R^{n-1}p + R^nq$$

Démonstration. On fera successivement $n = 1, 2, 3, 4, \dots n-1, n$ dans l'expression (3) du paragraphe précédent ; dans la formule générale du théorème (n° 305), on remplacera ensuite les diverses puissances de B par les valeurs ainsi trouvées et l'on aura :

$$N = \dot{D} + a + Rb + R^2c + \cdots + R^{n-1}p + R^nq \qquad \text{(A)}$$

320. Théorème ii ou 1er Caractère. *Tout nombre* D *qui divise la base du système de numération diminuée d'une unité, ainsi que la somme des chiffres d'un nombre* N, *divise aussi ce nombre.*

Démonstration. On a donc

$$B - 1 = \dot{D} \quad , \text{ ou } \quad B = \dot{D} + 1$$

On en déduit que

$$R = R^2 = R^3 = \dots\dots R^n = 1$$



La formule (A) devient donc

$$N = \dot{D} + a + b + c + \ldots . + p + q. \qquad (c.q.f.d.)$$

321. Remarquons que *si la somme des chiffres n'est pas divisible par* D, *son résidu sera le même que celui du nombre* N.

322. Théorème III ou 2e Caractère. *Tout nombre* D *qui divise la base du système de numération augmentée d'une unité, ainsi que l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur celle des chiffres de rang pair, d'un nombre donné, divise aussi ce nombre.*

Démonstration. On a donc

$$B + 1 = \dot{D} \quad , \quad \text{ou } B = \dot{D} - 1$$

Donc

$$R = R^3 = R^5 = R^7 = \ldots . = - 1$$

$$R^2 = R^4 = R^6 = R^8 = \ldots . = + 1$$

D'où l'on voit que la formule fondamentale A donne

$$N = \dot{D} + (a + c + e + g + \ldots .) - (b + d + f + h + \ldots .)$$
(c.q.f.d.)

323. Si le nombre D n'est pas sous-multiple de N, il est clair que : *Le résidu du nombre* N *est égal à celui de l'excès de la somme des chiffres de rang pair sur celles des chiffres de rang impair.*

324. Théorème IV ou 3e Caractère. *Tout nombre* D *qui divise la base et le chiffre des unités d'un nombre* N *divise aussi ce nombre.*

Démonstration. On a ici

$$B = \dot{D}$$

$$a = \dot{D}$$

On en conclut

$$R = 0$$

Et par suite

$$N = \dot{D} + a \qquad (c.q.f\ d.)$$

325. Remarquons encore que *si* D *ne divise pas* a, *le résidu de* N *sera le même que celui de son chiffre de droite.*

326. Sans examiner les formes particulières numériques sous les quelles se présentent ces trois caractères (320, 322, 324) pour chaque système de numération, nous nous bornerons à les considérer par rapport au système décimal.

Par extension le système décimal comprendra ceux dont les bases sont les puissances successives de 10 ; et l'on aura ainsi pour bases

$$B = 10, 100, 1000, 10000, \ldots\ldots$$

327. *Conséquence du 1er caractère.*

Pour B = 10, on a

$$B - 1 = 9$$

Les diviseurs de 9 étant 3 et 9.

Un nombre est divisible par 3 ou par 9 suivant que la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou par 9 (nos 121 122).

328. Pour $B = 100$

$$B - 1 = 99.$$

Les diviseurs de 99 sont 3, 9, 11 ; comme nous possédons déjà des caractères simples par 3 et 9, nous dirons seulement en remarquant que dans ce système il y a 100 signes de numération,

Un nombre est divisible par 11 lorsque la somme de ses tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche, est divisible par 11.

329. Pour $B = 1000$

$$B - 1 = 999 = 3.3.3.37 = 27.37.$$

Donc

Un nombre est divisible par 27 ou par 37 si la somme de ses groupes est multiple de 27 ou de 37.

330. *Conséquences du 2e caractère.*

Pour $B = 10$, on a

$$B + 1 = 11$$

D'où l'on voit que,

Un nombre est divisible par 11, si l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur celle de rang pair est divisible par 11 (no 127).

331. Pour $B = 100$, on a

$$B + 1 = 101 \text{ (nombre premier)}$$

C'est-à-dire que,

Un nombre est divisible par 101 si l'excès de la somme des tranches de rang impair sur celle des tranches de rang pair, de deux chiffres, est multiple de 101.



332. Pour $B = 1000$, on a

$$B + 1 = 1001 = 7.11.13$$

Et par suite,

Un nombre est divisible par 7, *par* 11, *ou par* 13, *si l'excès de la somme des groupes de rang impair sur celle des groupes de rang pair est multiple de* 7, *de* 11 *ou de* 13.

333. *Conséquences du* 3ᵉ *caractère.*

Soit $B = 10 = 2.5$

Un nombre est divisible par 2, *si son chiffre d'unité est* 0, 2, 4, 6 *ou* 8; *il est divisible par* 5 *si ce chiffre est* 0 *ou* 5 (nº 107, 109).

334. Soit $B = 100 = 4.25$; d'où l'on déduit,

Un nombre est divisible par 4, *lorsque sa première tranche à droite de deux chiffres est divisible par* 4 (nº 111).

Un nombre est divisible par 25 *lorsque sa première tranche à droite de deux chiffres est* 00, 25, 50, ou 75. (nº 112).

335. Soit $B = 1000 = 8.125$. D'où

Un nombre est divisible par 8, *lorsque son premier groupe est multiple de* 8 (nº 114).

Un nombre est divisible par 125, *lorsque son premier groupe est* 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. (nº 115).

336. Pour découvrir, dans un système B assigné, le caractère de divisibilité correspondant à un diviseur D donné, on formera d'abord les nombres.

$$B - 1 \ , \ B \ , \ B + 1$$

On les décomposera, ainsi que D, dans leurs facteurs premiers; puis, pour chacun des facteurs de D, et conformément aux trois théorèmes généraux 320, 322, 324, on formulera les caractères de divisibilité ; en réunissant ces caractères on aura la condition de divisibilité par D.

Ainsi, et pour ne donner qu'un exemple, supposons que *dans le système septénaire, on demande le caractère de divisibilité par le nombre 15 de ce système.*

On remarquera d'abord que 15 à base 7 donne 12 dans le système décimal; or

$$12 = 3.4$$

Et si l'on remarque que 3 divise la base 7 diminuée de 1, et 4, cette même base augmentée de 1, on conclura que :

Dans le système septénaire pour qu'un nombre soit divisible par 15, il faut 1° que la somme de ses chiffres soit multiple de 3; 2° que l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur celle des chiffres de rang pair soit divisible par 4.

EXERCICES.

1. Ecrire dans le système dont la base est 15, les quatre nombres 504, 756, 1260, 2058, dont les deux premiers sont du système octoval, le troisième du système septénaire, et le quatrième du système dont 9 est la base.

2. Effectuer dans le système à base 6, le produit

$$345,2014 \;.\; 13,254$$

3. Dans la base 8, diviser 51117344 par 675.

4. Quelle est la base du système de numération dans lequel 642 correspond au nombre 324 du système décimal.

5. Quel est le nombre décimal représenté dans deux autres systèmes par 30405 et 70700, la base de celui-ci surpassant de 1 la base de l'autre.

6. Quelle est la base du système de numération dans lequel 243 correspond au nombre décimal 129.

7. Quelle est la base du système de numération dans lequel 10403 correspond au nombre octoval 1330.

8. Le nombre 49010 est la somme des nombres 1004003 et 2001002, dans deux systèmes de numération où la base du premier est double de celle du second; on demande quelles sont ces bases.

9. Caractères de divisibilité dans la base 5, pour les nombres 2, 10, 11, 12, 21, 100, 102 de ce système.

10. Quels sont les caractères de divisibilité, pour le système quinquennaire, des nombres 2, 12, 23.

11. Caractère de divisibilité par 22 dans le système septénaire.

12. Caractère de divisibilité par 5 dans les systèmes unodécimal et duodécimal.

13. Caractère de divisibilité par 8 dans le système B=14.

14. Caractère de divisibilité par 18 et 11 dans la base 21.

15. On suppose la fraction 0,352 écrite dans le système septénaire et l'on demande sa valeur dans le système décimal.

16. Simplifier la fraction

$$\frac{2314}{3403}$$

écrite dans le système dont la base est 6.

LIVRE VI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

CHAPITRE I.

Rapport, nombre incommensurable, généralités. — Egalité entre nombres ou rapports incommensurables. — Théorème; toute égalité, correspondant à un mode déterminé de subdivision, existe encore pour tout autre mode. — Extension aux nombres incommensurables des propriétés relatives aux opérations.

337. Deux quantités *incommensurables* n'ont entr'elles aucune commune mesure, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent être partagées en parties égales les mêmes pour l'une et pour l'autre : en d'autres termes, deux grandeurs sont incommensurables, lorsqu'il est impossible d'en trouver une troisième qui soit contenue un nombre entier de fois dans l'une et dans l'autre.

Il devient donc indispensable de définir ce que l'on entend par nombre incommensurable; mais, pour être plus complet et rester plus général, parlons du rapport incommensurable.

En comparant deux quantités, supposons d'abord que la plus petite n'étant pas sous-multiple de la plus grande, une partie, contenue n fois dans la plus petite, soit renfermée m

fois dans la plus grande; nos deux grandeurs sont ainsi commensurables et l'on saura que la plus grande est égale à m fois la n^{me} partie de la plus petite, qui n'est que n fois la m^{me} partie de la plus grande.

On a écrit conventionnellement ce rapport sous l'une des formes $\frac{m}{n}$ et $\frac{n}{m}$; et l'on a ainsi des expressions fractionnaires.

338. Mais supposons que cette commune mesure n'existe pas; soient les deux quantités P et Q, dont nous divisons l'une Q par a qui est sous-multiple de P; soient n le quotient et r le reste, il vient :

$$Q = n\,a + r$$

a n'étant assujéti qu'à la seule condition d'être partie aliquote de P, il est clair que si a diminue indéfiniment, r décroîtra indéfiniment aussi; de telle sorte qu'en disposant convenablement de a, le résidu r pourra diminuer sans cesse, devenir plus petit que tout ce que l'on peut s'imaginer, et TENDRE *ainsi vers zéro.*

Entre P et $n\,a$ qui constitue donc une quantité variable s'approchant indéfiniment de la quantité constante donnée Q, il existe donc une commune mesure; le rapport commensurable $\frac{P}{na}$, qui s'approche sans cesse, *sans jamais pouvoir l'atteindre,* de $\frac{P}{Q}$, est donc commensurable, et tiendra lieu de $\frac{P}{Q}$ avec d'autant plus d'approximation que la quantité a est petite ; quant à $\frac{P}{Q}$, il y a impossibilité d'en déterminer la valeur avec exactitude.

Lorsqu'une quantité varie d'une manière *continue*, les diverses valeurs par lesquelles elle passe s'approchent indéfiniment d'une certaine valeur qui porte le nom de *limite de la quantité variable;* la limite est donc la valeur dont peuvent s'approcher indéfiniment et d'aussi près que l'on veut, les

valeurs particulières d'une grandeur qui varie d'une manière continue.

Nous pourrons ainsi dire :

On entend par *rapport incommensurable, la valeur vers laquelle converge le rapport de la première des deux grandeurs à d'autres, variables continuement et ayant la seconde grandeur pour limite.*

339. Soient les rapports $\frac{P}{Q}$ et $\frac{p}{q}$ limites des séries de rapports commensurables,

$$\frac{P}{Q_1}, \frac{P}{Q_2}, \frac{P}{Q_3}, \ldots\ldots \frac{P}{Q_n} \qquad (1)$$

$$\frac{p}{q_1}, \frac{p}{q_2}, \frac{p}{q_3}, \ldots\ldots \frac{p}{q_n} \qquad (2)$$

Nous supposons que le même mode de subdivision ait fourni les valeurs correspondantes Q_1 et q_1, Q_2 et q_2, etc., et en général Q_n et q_n :

Si les rapports commensurables *de même rang* des séries (1) et (2) sont égaux, on dit que les grandeurs P et Q ont même rapport que les deux autres, et ainsi l'on a cette égalité,

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$$

Telle est donc la signification *précise* d'une *égalité entre rapports incommensurables*, dans laquelle chacun de ces rapports est une limite vers laquelle converge continûment d'autres rapports commensurables.

340. Théorème. *L'égalité établie, pour un mode déterminé de subdivision, entre deux rapports incommensurables, existe encore quand on modifie arbitrairement la loi de division.*

Démonstration. Soient A et B deux quantités incommensurables, et A′ B′ deux autres grandeurs n'ayant pas non plus de commune mesure ; ces deux couples sont tels que, pour une loi (π) donnée de subdivision, les rapports du premier et du second sont égaux ; soit de plus

$$A < B, \quad \text{et} \quad A' < B'$$

Il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A′ en un même nombre de parties égales, en dehors de la loi (π), les quantités B et B′ renfermeront toujours le *même nombre entier* de subdivisions.

Pour cela, en représentant par β un nombre entier, soit la loi nouvelle (L) de subdivision

$$\left.\begin{array}{l} \beta y = A \\ \beta y' = A' \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Représentons par p le nombre de parties y contenues dans B, et supposons que B′ en contienne un plus grand nombre ; on aura donc

$$\left.\begin{array}{l} (p+1)\, y > B \\ (p+1)\, y' > B' \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Posons

$$\varepsilon = (p+1)\, y - B\,, \quad \text{d'où} \quad B + \varepsilon = (p+1)\, y$$

Choisissons, parmi les quantités moindres que ε, une quantité z satisfaisant à la loi (π) donnée, α étant un nombre entier, supposons que l'on ait ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha z = A \\ \alpha z' = A' \end{array}\right\} \qquad (5)$$



Des relations (3) et (5) on déduit

$$\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \qquad (6)$$

D'où

$$y=\frac{y'}{z'}z\,, \quad \text{et} \quad y'=\frac{y}{z}z'$$

On aura donc

$$\left.\begin{array}{l}(p+1)\,y=(p+1)\,\dfrac{y'}{z'}\cdot z \\ (p+1)\,y'=(p+1)\,\dfrac{y}{z}\cdot z\end{array}\right\} \qquad (7$$

Dans les seconds membres de ces égalités les facteurs de z et de z' sont évidemment égaux, en vertu de la relation (6). Faisons,

$$N=(p+1)\frac{y'}{z'}$$

Comme on a posé

$$B+\varepsilon=(p+1)\,y$$

Il s'en suit que

$$B+\varepsilon=Nz\,, \quad \text{et} \quad N=\frac{B+\varepsilon}{z} \qquad (8)$$

La seconde des égalités (4), combinée avec (7) et (8) fournit :

$$N<\frac{B'}{z'} \qquad (9)$$

Ce qui *porterait* à conclure que, *le nombre* N *de parties* z *contenues dans* B *est moindre que le nombre de parties* z' *con-*

tenues dans B'; et c'est ce qui ne se peut puisque la partie z obéit à la loi (π) donnée de subdivision.

Cette impossibilité prouve que l'on ne peut admettre simultanément les égalités (4), et qu'ainsi :

En partageant A et A' *en un même nombre de parties égales, ces parties sont respectivement contenues dans* B *et* B' *le même nombre entier de fois.*

341. *Remarque.* Puisque l'on passe de la notion générale du rapport à celle du nombre, en supposant que la grandeur à laquelle on compare l'autre est prise pour unité, il est clair que ce qui précède donne la *notion complète du nombre incommensurable;* un pareil nombre devient ainsi la limite commune, ou le terme de séparation, entre les nombres commensurables supérieurs et inférieurs au nombre considéré.

342. Examinons la signification des opérations fondamentales propres aux nombres incommensurables.

Considérons par exemple l'*addition*, ou la *soustraction*

$$\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

Par *total* on entend ici, pour un même mode de division et subdivision de l'unité, la limite vers laquelle converge la somme ou la différence des nombres supérieurs et inférieurs à chacun des nombres $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$.

343. Quant à la multiplication, considérons

1° *Le cas où le multiplicateur est commensurable:* soit

$$\sqrt{3} \cdot 5$$

Le produit pourra être formé avec le multiplicande $\sqrt{3}$ comme le multiplicateur est formé avec l'unité, et la même chose se dirait si le multiplicateur était fractionnaire.



2° *Le cas où le multiplicateur est incommensurable.*

$$N \cdot \sqrt{2}$$

Alors il faut considérer comme *produit* la limite commune vers laquelle converge, à mesure que le nombre de subdivisions de l'unité devient grand, *le produit de* N *par les nombres commensurables supérieurs et inférieurs à* $\sqrt{2}$.

344. Pour la division, la définition reste telle que nous l'avons établie, et l'on se propose de trouver un nombre (appelé quotient), qui, multiplié par un autre (appelé diviseur), donne le dividende pour produit.

345. Ce que nous venons de dire permet évidemment d'étendre aux nombres incommensurables les opérations exécutées sur les nombres commensurables; *il suffit* pour cela de substituer à ces nombres des valeurs commensurables qui en approchent *suffisamment*.

En d'autres termes :

Le résultat d'opérations à exécuter sur des nombres incommensurables est la limite des résultats que l'on obtient en substituant à chacun de ces nombres des valeurs commensurables successives qui en approchent indéfiniment.

Il en résulte donc que, relativement à l'ordre des facteurs d'un produit, aux modifications par multiplication ou par division d'un produit par un nombre, ainsi qu'aux fractions, les propriétés établies dans l'hypothèse de la commensurabilité sont encore vraies dans le cas des nombres incommensurables.

CHAPITRE II.

—

THÉORIE GÉNÉRALE DES FRACTIONS PÉRIODIQUES.

—

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être convertie en fraction décimale d'un nombre limité de chiffres décimaux. — Caractère d'impossibilité de cette conversion; périodicité des restes et des quotients. — Fractions décimales périodiques simples, mixtes. — Caractère de la fraction périodique simple. — Caractère de la fraction périodique mixte; nombre de chiffres décimaux non périodiques. — Tout nombre non divisible par 2 et 5 est sous-multiple de $10^m - 1$, (m étant entier). — Égalité des nombres de chiffres périodiques pour des fractions irréductibles de même dénominateur, ou dont les dénominateurs ne diffèrent que par des puissances de 2 ou de 5. — Détermination du nombre de chiffres d'une fraction périodique simple. — Génératrices des fractions périodiques simples et mixtes. — La génératrice est la limite vers laquelle converge la valeur de la fraction décimale lorsque l'on considère un nombre de plus en plus grand de périodes. — Lorsque le dénominateur d'une fraction ordinaire est premier le nombre de chiffres de la période est un diviseur du dénominateur moins un. — Théorème de Fermat, sa généralisation. — Combien y a-t-il de nombres premiers avec un nombre donné et qui lui sont inférieurs. — Limite supérieure du nombre des chiffres d'une période simple. — Génératrices des fractions périodiques dans un système quelconque de numération.

346. Dans tout ce qui va suivre nous supposerons que la fraction ordinaire donnée est réduite à sa plus simple

expression et que son numérateur moindre que le dénominateur n'a pas 0 pour chiffre d'unité.

Lorsque par division on cherche à transformer une fraction ordinaire en fraction décimale, on s'aperçoit bientôt que ce calcul est impossible dans certains cas particuliers et remarquables : c'est *Robertson* en 1764 qui s'occupa le premier de la théorie importante à laquelle donna lieu cette question.

347. Théorème. I. *Toute fraction irréductible $\frac{A}{B}$ dont le dénominateur ne renferme que les facteurs premiers 2 ou 5 est exactement réductible en décimales ; le nombre des chiffres décimaux est égal au plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.*

Démonstration. Soit $B = 2^m\,5^n$, et supposons $m > n$. Multipliant les deux termes de la fraction $\frac{A}{B}$ par 5^{m-n}, il viendra :

$$\frac{A}{B} = \frac{A.5^{m-n}}{B.5^{m-n}} = \frac{A.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}}$$

ou

$$\frac{A}{B} = \frac{A.5^{m-n}}{10^m}$$

Cette dernière fraction a pour dénominateur l'unité précédée de m zéros ; donc $\frac{A}{B}$ est équivalente à une fraction décimale contenant m chiffres décimaux : de plus le nouveau numérateur $A.5^{m-n}$ peut s'obtenir sans effectuer de division.

Cette propriété est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être convertie en une fraction décimale d'un nombre limité de chiffres décimaux.

348. Théorème ii. *Toute fraction ordinaire irréductible, dont le dénominateur renferme un ou plusieurs facteurs premiers différents de 2 ou 5, conduit à une fraction décimale d'un nombre* illimité *de chiffres décimaux.*

Démonstration. Supposons que r étant un nombre entier ainsi que m, la fraction proposée $\frac{A}{B}$ puisse donner lieu à l'égalité

$$\frac{A}{B} = \frac{r}{10^m}.$$

D'où

$$A \cdot 10^m = B \cdot r$$

Or B contenant des facteurs premiers autres que 2 et 5, le produit $A \cdot 10^m$ devrait être divisible par chacun d'eux, ce qui est impossible puisque A est premier avec B.

Il est ainsi démontré qu'alors la fraction $\frac{A}{B}$ se réduira en une fraction décimale d'un nombre *illimité* de chiffres; si donc on procède à cette réduction, aucune division ne donnera *zéro* pour reste et comme chaque reste est moindre que B, il arrivera au plus tard qu'après B—1 divisions on retrouvera *un reste déjà obtenu.* Alors évidemment les restes se succéderont dans le même ordre que ceux qui suivent celui dont on obtient la répétition; les *quotients et les restes formeront donc deux suites périodiques, dont le nombre de termes de chaque période est moindre que le dénominateur.*

349. On appelle *fraction décimale périodique* une fraction décimale d'un nombre illimité de chiffres décimaux, dans laquelle ces chiffres se reproduisent périodiquement et dans le même ordre, à partir d'un certain rang.

L'ensemble des chiffres, qui se reproduisent ainsi indéfiniment, se nomme *période* : la période est *simple* lorsqu'elle

commence au premier chiffre décimal ; elle est *mixte* dans tout autre cas.

350. Remarquons que lorsqu'une fraction ordinaire donne lieu à un quotient périodique mixte, on peut déduire de cette fraction celle qui donnerait lieu à une partie périodique simple ; il suffit en effet de multiplier la fraction $\frac{A}{B}$ proposée par une puissance de 10 égale à la plus haute puissance de 2 ou de 5 qui entre dans le dénominateur.

351. Théorème. III. *Lorsqu'une fraction ordinaire se traduit en une fraction décimale d'un nombre* ILLIMITÉ *de chiffres, cette fraction est* PÉRIODIQUE.

Démonstration. On opère cette traduction en écrivant successivement des zéros à la droite du numérateur, pour ne s'arrêter par division que lorsqu'on arrive à un reste *nul*, ou à un reste qui indique la périodicité de la transformée.

Si cette transformée n'était pas périodique, il faudrait qu'un reste déjà obtenu ne put être retrouvé, car dès qu'un reste se reproduirait, la division s'exécuterait par la même série d'opérations que l'on avait effectuées antérieurement : or pour un nombre illimité de chiffres décimaux, il devrait y avoir *un nombre illimité de restes différents*, ce qui est impossible puisque ces restes différents sont toujours moindres que le dénominateur.

Théorème IV. *Si le dénominateur d'une fraction irréductible* $\frac{A}{B}$ *est premier avec* 10, *la période commence dès la virgule.*

Démonstration. Le passage de $\frac{A}{B}$ à son équivalente décimale s'effectue évidemment en divisant par B les produits

du numérateur A par les diverses puissances successives de 10. Supposons que deux des dividendes ainsi obtenus

$$A\,.\,10^{l} \quad \text{et} \quad A\,.\,10^{k}$$

donnent des restes égaux ; leur différence devra être divisible par B, c'est-à-dire que

$$A\,.\,10^{l} - A\,.\,10^{k} = \dot{B}$$

ou

$$10^{k}\,(A\,.\,10^{l-k} - A) = \dot{B}$$

Mais B, qui divise le second nombre de cette égalité, est premier avec 10, et par suite avec 10^k ; donc B divise

$$A\,.\,10^{l-k} - A$$

Et comme B ne divise pas A, en vertu du (nº 104) les résidus par B de

$$A\,.\,10^{l-k} \quad \text{et} \quad A$$

sont égaux. Ainsi par les dividendes successifs,

$$A\,,\; A.10\,,\; A.10^{2}\,,\; A.10^{3}\,,\ldots\ldots A.10^{k}\ldots\ldots A.10^{l}$$

le terme $A.10^{l-k}$ donne le même reste que le premier A ; ce qui veut dire que la période des restes commence avec le premier dividende, et la période décimale avec le chiffre des dixièmes.

353. Corollaire. *Les chiffres de la partie entière d'une expression décimale ne peuvent faire partie de la période.*

Car soit Q et Q' les quotients ayant donné un même reste R, et correspondants aux dividendes $A \cdot 10^{l-k}$ et A; on a

$$A = Q \cdot B + R$$

$$A \cdot 10^{l-k} = Q' B + R$$

D'où

$$A\,(10^{l-k} - 1) = (Q' - Q)\,B$$

La quantité entre parenthèses n'étant composée que de chiffres 9, n'est pas divisible par 10 et par conséquent le second membre n'est pas multiple de 10; il s'en suit que B étant premier avec 10, le facteur Q' — Q l'est également, ou en d'autres termes que Q et Q' n'ont pas ce même chiffre de droite.

354. Théorème v. *Lorsque le dénominateur n'est pas premier 10, la période est précédée d'une partie décimale* non périodique *dont le nombre de chiffres est égal au plus grand des exposants de 2 et 5 dans le dénominateur.*

Démonstration. Soit la fraction $\frac{A}{B}$, telle que

$$B = C \cdot 2^m\, 5^n$$

Supposons $m > n$; multipliant haut et bas par 5^{m-n} il viendra,

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot 5^{m-n}}{C \cdot 2^m \cdot 5^m} = \frac{A \cdot 5^{m-n}}{C} \cdot \frac{1}{10^m}$$

Si l'on réduit en décimales la fraction

$$\frac{A \cdot 5^{m-n}}{C}$$

on aura une période simple, commençant à la virgule puisque (n° 352) C est premier avec 10; si 0, *a'b c d.... p q*, est cette fraction périodique décimale il faudra encore, pour la multiplier par $\frac{1}{10^m}$, avancer vers la gauche la virgule de *m* rangs. (*c.q.f.d.*)

353. Théorème vi. *Tout nombre* d *premier avec* 10, *divise* $10^m - 1$, (m *étant un nombre entier*).

Démonstration. Le nombre $10^m - 1$ n'est évidemment composé que de chiffres 9. Si l'on divise 9999 .... par *d*, *aucun reste ne pourra atteindre* d — 1.

En effet. si cela pouvait être, on devrait avoir

$$9999.... = \dot{d} + d - 1 = \dot{d} - 1$$

D'où

$$10^m = \dot{d}$$

égalité impossible puisque *d* est premier avec 10.

2° *Deux restes quelconques ne peuvent être égaux*, c'est-à-dire que le quotient ne peut pas être périodique.

En effet, si par exemple, les dividendes

999999999, et 9999

pouvaient donner des restes égaux, d'après la propriété (n° 103), leur différence serait multiple du diviseur; il s'en suivrait que

$$999990000 = \dot{d}$$

relation impossible puisque d étant premier avec 2 et 5, devrait diviser 99999, ce qui ne pourrait être qu'autant que l'un des restes déjà obtenus eut été *nul*.

On voit donc que dans la division de $10^m - 1$ par un nombre d premier avec 10, tous les restes sont différents, et qu'ainsi la série de ces restes s'épuisera ou s'arrêtera brusquement à *zéro* ; d'où l'on conclut :

$$10^m - 1 = \dot{d} \qquad (c.q.f.d.)$$

356. Théorème vii. *Si deux fractions irréductibles* $\frac{A}{B}$ *et* $\frac{A'}{B'}$ *donnent lieu à des fractions décimales périodiques, les périodes ont même nombre de chiffres toutes les fois que* B *et* B' *sont égaux, ou ne diffèrent entr'eux que par des puissances de* 2 *ou de* 5.

Démonstration. En premier lieu si B et B' ne contiennent ni 2 ni 5, alors d'après l'énoncé on a

$$B = B'$$

Désignons par p et p' les nombres de chiffres des périodes auxquelles donnent les fractions proposées.

Pour $\frac{A}{B}$, une période commence à la virgule et se termine au chiffre de rang p ; donc

$$A \quad \text{et} \quad A \cdot 10^p$$

donnent les mêmes résidus par B ; par suite

$$A \cdot 10^p - A, \quad \text{ou} \quad A(10^p - 1)$$

est divisible par B ; or B est premier avec A, donc B divise $10^p - 1$

B divisera donc ainsi le multiple A' $(10^p - 1)$, et par conséquent A' et A' $(10^p - 1)$ donnent les mêmes restes par la

division par B. On voit donc que l'une des périodes de $\frac{A'}{B'}$, se terminant au p^e chiffre,

p' *n'est pas plus grand que* p.

On prouverait de même que

p *n'est pas plus grand que* p'

Donc

$$p' = p. \qquad c.q.f.d.$$

En second lieu, si B et B' ou l'un des deux, contiennent les facteurs 2 et 5, en multipliant haut et bas par des puissances convenables de 2 et 5, on pourra amener les fractions décimales à ne différer que par le rang de la virgule de celles relatives à $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$; leurs périodes ont donc encore conservé le même nombre de chiffres.

357. Théorème viii. *Le nombre des chiffres d'une période simple est égal à la plus petite valeur de* m *qui rend* $10^m - 1$ *divisible par le dénominateur* B *de la fraction ordinaire: ou bien le nombre de chiffres de la période est égal au degré de la plus faible puissance de* 10 *qui, diminuée de* 1, *est divisible par* B.

Démonstration. Puisque le numérateur n'a pas d'influence (n° 356) sur le nombre des chiffres de la période simple à laquelle donne lieu une fraction irréductible à dénominateur premier avec 10, nous pouvons considérer la fraction élémentaire

$$\frac{1}{B}$$

du dénominateur B de laquelle les nombres 2 et 5 ne sont pas facteurs.

La transformation de $\frac{1}{B}$ en fraction décimale revient à

diviser 10^n par B, et à supposer que n croît indéfiniment et sans limite; or n croissant de cette manière passera par la valeur m pour laquelle $10^m - 1$ est multiple de B, et à cet instant on aura 1 pour reste.

Si l'on désigne par $a\ b\ c\ d \ldots p\ q$ le quotient

$$\frac{10^m - 1}{B}$$

On aura donc

$$\frac{1}{B} = 0,\ abcd\ldots pq + \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{10^m}$$

Et pour la fraction $\frac{1}{B}$ du second membre il faudrait refaire la division qui vient d'être faite pour $\frac{1}{B}$ du premier membre ; on obtiendrait encore le même quotient

$$0,\ a\,b\,c\,d \ldots p\,q$$

Seulement à cause du facteur $\frac{1}{10^m}$ il faudrait avancer la virgule de m rangs vers la droite, ce qui donnera

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{10^m} = 0{,}000 \ldots a\,b\,c\,d \ldots p\,q$$

Par substitution, et en continuant à raisonner de la sorte, on verrait que

$$\frac{1}{B} = 0,\ a\,b\,c\,d \ldots pq\ a\,b\,c\,d \ldots p\,q\ a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots$$

Il est donc clair que la période simple renferme autant de chiffres qu'*il y a d'unités dans la première puissance de* 10 *qui est supérieure de* 1 *à un multiple du dénominateur*.

358. Nous connaissons maintenant le nombre de chiffres



non périodiques pour une fraction à période mixte, et celui des chiffres périodiques ; ce dernier nombre qui n'est donné ni déterminé par *aucun* auteur, nous a paru d'une importance assez grande pour être introduit *régulièrement* dans la théorie générale des fractions périodiques.

Ainsi 1° *Toutes les fractions ordinaires de même dénominateur ont même nombre de chiffres périodiques.*

Soit $\frac{1}{13}$ qui donne lieu à une période simple (n° 332) ; en cherchant la plus petite valeur de m (n° 337) qui donne 0 pour reste dans la division de $10^m - 1$ par 13, on trouve

```
999999 | 13
 89    |------
 119   | 76923
   29
    39
     0
```

D'où

$$10^6 - 1 = 13 \,.\, 76923$$

En divisant les deux membres par $13 \,.\, 10^6$, il vient :

$$\frac{1}{13} = \frac{76923}{10^6} + \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{13}$$

ou

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923 + \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{13}$$

Et plus simplement si l'on sous-entend que l'unité principale de la fraction $\frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{13}$ est du 6ᵉ ordre,

$$\tfrac{1}{13} = 0{,}076923 \tfrac{1}{13} = 0{,}076923076923....$$

Soit actuellement la fraction $\frac{8}{13}$; on aura

$$\tfrac{8}{13} = \tfrac{1}{13} \cdot 8 = (0{,}076923 \tfrac{1}{13})\, 8 = 0{,}615384 \tfrac{8}{13}$$

2° *Le nombre de chiffres périodiques est encore le même si les dénominateurs ne diffèrent entr'eux que par des puissances de 2 ou de 5* (n° 356).

Soit la fraction $\frac{1}{260}$ qui donne lieu à

$$\frac{1}{260} = 0{,}00384615384615$$

La période non-périodique a deux chiffres, qui sont ici les deux premiers zéros décimaux, et la période a 6 chiffres : c'est ce que l'on pouvait immédiatement découvrir par la décomposition factorielle du dénominateur

$$260 = 13 . 4 . 5 = 13 . 2^2 . 5$$

2 étant le plus grand exposant des fauteurs 2 et 5, il y a (n° 354) 2 chiffres décimaux non périodiques ; quant au nombre de chiffres de la période , il sera le même que celui auquel donnerait lieu le dénominateur 13, qui est le produit des facteurs de 260 autres que 2 et 5.

LIMITES DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

359. La fraction ordinaire qui donne naissance à une fraction décimale périodique en est la *génératrice*.

Théorème ix. *La génératrice d'une fraction périodique simple a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

Démonstration Soit la fraction décimale

$$0, a\,b\,c\,d \ldots p\,q\,a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots$$

dont la fraction ordinaire équivalente et inconnue, est désignée par $\frac{A}{B}$.

Nous avons vu (nº 357) que la période est donnée par la relation suivante :

$$\frac{10_m - 1}{B} = a\,b\,c\,d\ldots\,p\,q.$$

dans laquelle *m* est égal au nombre de chiffres périodiques, et qui fournit dès lors :

$$B = \frac{a\,b\,c\,d\ldots.\,p\,q}{9\,9\,9\,9\ldots.\,9\,9} \qquad (c.q.f.d.$$

360. Le dénominateur de la fraction irréductible génératrice d'une périodique simple *ne renferme ni le facteur* 2 *ni le facteur* 5 ; en effet le dénominateur $10^m - 1$ de la génératrice est premier avec 10.

361. Théorème x. *La génératrice d'une fraction décimale périodique mixte a pour numérateur l'excès sur la partie non périodique du nombre formé par cette même partie et une période ; le dénominateur est composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres périodiques, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux non périodiques.*

Démonstration. Soit $\frac{P}{Q}$ la génératrice de la fraction décimale périodique

$$0,\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,a\,b\,c\,d\ldots.\,p\,q\,a\,b\,c\,d\ldots.\,p\,q\ldots.$$

On peut écrire, en décomposant en deux parties. puis en multipliant et en divisant chacune de ces parties par une puissance de 10 dont le degré est égal au nombre de chiffres non périodiques :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}{10000} + \frac{1}{10000}\cdot 0,\ a\,b\,c\,d\ldots\,p\,q\,a\,b\,c\,d\ldots.\,p\,q\ldots$$

D'après le théorème précédent on aura donc, en remplaçant la périodique simple du second membre par sa génératrice,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{10000} + \frac{1}{10000} \cdot \frac{a\,b\,c\,d \ldots p\,q}{9\,9\,9\,9 \ldots 9\,9}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{9999\ldots 99 \cdot \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta + a\,b\,c\,d \ldots p\,q}{9999\ldots 990000}$$

Comme dans le nombre 9999... 99 il y a autant de 9 qu'il y a de chiffres dans $a\,b\,c\,d \ldots p\,q$, posons

$$9999\ldots 99 = 10000\ldots 00 - 1$$

Le nombre de zéros à la droite de 1 dans le second membre, étant égal au nombre de chiffres périodiques; on aura alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta 0000\ldots 00 + a\,b\,c\,d \ldots p\,q - \alpha\beta\gamma\delta}{9\,9\,9\,9 \ldots 9\,9\,0\,0\,0}$$

ou enfin

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\,a\,b\,c\,d \ldots p\,q - \alpha\beta\gamma\delta}{9\,9\,9\,9 \ldots 9\,9\,0\,0\,0\,0}$$ *(c.q.f.d.*

362. Le numérateur de la génératrice d'une fraction périodique mixte ne peut jamais avoir *un* ou *plusieurs zéros pour chiffres de droite;* car il faudrait pour cela que quelques-uns des chiffres de la partie non périodique soient égaux aux derniers chiffres de la période, qui commencerait ainsi *plus tôt* qu'on ne l'avait supposé.

On en conclut que si la génératrice d'une fraction périodique est réductible, son irréductible équivalente a à la droite

de son dénominateur autant de zéros que la partie non périodique a de chiffres.

363. Théorème xi. *La génératrice d'une fraction décimale périodique est la* limite *vers laquelle converge continuement la valeur de la fraction décimale, lorsqu'on y considère un nombre* n *croissant de périodes.*

Démonstration. D'après ce que nous avons déjà vu, il suffit de traiter le cas de la périodique décimale simple, dont la génératrice est représentée pour abréger par g; on a donc

$$g = 0, a\,b\,c\,d \ldots p\,q\,a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots$$

Désignons par m le nombre de chiffres de la période; en ne considérant que n périodes nous aurons en vertu de (356),

$$g = 0.\,a\,b\,c\,d \ldots\ p\,q\,a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots + g \cdot \frac{1}{10^{mn}} \qquad (1)$$

Multipliant de part et d'autre par 10^m, il viendra

$$10^m \cdot g = a\,b\,c\,d \ldots p\,q,\ a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots + g \cdot \frac{1}{10^{m(n-1)}} \qquad (2)$$

Les parties indépendantes de g dans les seconds membres de ces égalités contiennent respectivement $m\,n$ et $m\,(n-1)$ chiffres décimaux; en soustrayant ces égalités on obtiendra

$$(10^m - 1)g = abcd \ldots pq - \frac{b\,c\,d \ldots}{10^{mn}} + g\left(\frac{1}{10^{m(n-1)}} - \frac{1}{10^{mn}}\right)$$

ou

$$(10^m - 1)\,g = a\,b\,c\,d \ldots p\,q - \frac{a\,b\,c\,d \ldots p\,q}{10^{mn}} + g\,\frac{10^m - 1}{10^{mn}}$$

Divisons les deux membres par $10^m - 1$,

$$g = \frac{a\,b\,c\,d \ldots pq}{10^m - 1} + g \cdot \frac{1}{10^{mn}} - \frac{abcd \ldots pq}{10^m - 1} \cdot \frac{1}{10^{mn}}$$

Dans cette dernière relation si l'on fait croître n, la fraction $\frac{1}{10^{mn}}$ décroissant dès lors avec grande rapidité, le second membre converge vers la limite

$$\frac{abcd...pq}{10^m - 1} \text{ ou } \frac{abcd...pq}{9999...99}$$

qui se confond ainsi avec la génératrice de la fraction périodique proposée (c.q.f.d.)

Remarque. Cette démonstration pourrait suffire à la détermination de g; c'est même là *la seule* voie irréprochable en dehors de la méthode NOUVELLE, *beaucoup plus courte et plus simple*. que nous avons proposée et suivie (n°s 359 et 361).

364. THÉORÈME XII. *Si* D *et* N *sont deux nombres premiers entr'eux, les résidus par* D *des* D — 1 *premiers multiples de* N *sont tous différents*.

Démonstration. Ces D — 1 premiers multiples sont

$$N.1, \quad N.2, \quad N.3, \ldots \quad N.i, \ldots N.k, \ldots N(D-1)$$

D'abord aucun résidu ne sera *nul*, car il faudrait pour cela et pour un certain multiple N i. que l'on eut

$$Ni = \dot{D}$$

Et comme D est premier avec N, D devrait diviser i, ce qui est impossible puisque $i < D$.

En second lieu si deux résidus pouvaient être égaux, la différence des multiples Ni et Nk correspondants devrait (n° 103) être divisible par D; d'où

$$Nk - Ni = \dot{D}, \quad \text{ou} \quad N(k - i) = \dot{D}$$

Or $k - i$ est moindre que D; par suite cette égalité est



impossible, puisque les D — 1 premiers multiples de N ne sont pas divisibles par D.

Les résidus étudiés sont donc les D — 1 premiers nombres dans un certain ordre.

365. Corollaire. *Si parmi ces multiples, on ne prend que ceux qui sont* premiers avec D, *les résidus seront premiers avec* D.

En effet, car un dividende N i et son résidu r sont liés par l'égalité

$$Ni = \dot{D} + r$$

Or N i et $\dot{D}$ sont premiers par hypothèse, donc r est premier avec D, sans quoi les trois nombres Ni, $\dot{D}$ et r auraient un diviseur commun.

366. Théorème xiii. *Si le dénominateur d'une fraction est un nombre* premier, *la période décimale a pour nombre de chiffres un diviseur du dénominateur diminué de* 1.

Démonstration. Nous avons déjà dit que, toutes les fois que l'on étudie le nombre de chiffres d'une période, on peut se dispenser de considérer la valeur particulière du numérateur; soit donc la fraction $\frac{1}{N}$, N étant un nombre premier.

Formons la suite des produits

$$10.1, \quad 10.2, \quad 10.3, \ldots \quad 10.(N-1)$$

que nous divisons par N ; les restes, *sans tenir compte de l'ordre*, seront

$$1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3, \ldots \qquad N-1$$

Multipliant tous les termes de la suite des produits, on obtient

$$10^{N-1}.1.2.3.\ldots(N-1) \qquad (1)$$

le produit de tous les restes est

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1) \qquad (2)$$

Prouvons que les nombres (1) *et* (2) *donnent le même résidu par* N. Puisque les résidus par N des divers multiples de 10 sont tous différents et inférieurs à N, ces multiples pourront, sans avoir égard à leur ordre, être mis sous les formes

$$\dot{N}+1, \quad \dot{N}+2, \quad \dot{N}+3, \ldots \quad \dot{N}+(N-1)$$

Dès lors en multipliant les différents termes de cette dernière suite, on aura

$$10^{N-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1) = \dot{N} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1)$$

On voit ainsi que les restes des divisions des produits (1) et (2) par N sont égaux ; et que (n° 103) l'on a :

$$10^{N-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1) = \dot{N}$$

ou

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (N-1)\,[10^{N-1} - 1] = \dot{N}$$

N ne pouvant diviser aucun nombre moindre que lui, il est clair que cette égalité conduit :

$$10^{N-1} - 1 = \dot{N} \quad \text{ou} \quad \frac{10^{N-1} - 1}{N} = \text{nombre entier}$$

Or nous avons vu (n° 337), que le nombre m de chiffres d'une période *simple* est celui qui donne le premier quotient entier pour

$$\frac{10^m - 1}{N}$$

On a donc ici

$$N - 1 = \dot{m}$$

ce qui signifie que *le nombre de chiffres de la période est un diviseur du dénominateur moins un*.

Exemple. Nous avons déjà eu recours à :

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923076923....$$

Or pour ce cas

$$N - 1 = 12$$

et la période ayant 6 chiffres, la loi étudiée est vérifiée

COROLLAIRE ou *Théorème de* FERMAT. *Si* N *est un nombre premier qui ne divise pas* A, *la puissance* N — 1 *de* A *est supérieure de* 1 *à un multiple de* N.

Dans la démonstration précédente le nombre A n'ayant pas N pour sous-multiple, on peut faire l'application de la propriété (n° 366) aux conditions du théorème de Fermat ; le nombre 10 est ainsi remplacé par P, ce qui donne immédiatement la formule

$$A^{N-1} - 1 = \dot{N}$$

368. THÉORÈME XIV. *Si le dénominateur* N *d'une fraction est premier avec* 10, *et que l'on construise la série des nombres entiers moindres que* N *et premiers avec* N, *le nombre des termes de cette série est multiple du nombre des chiffres de la période simple à laquelle donne lieu la fraction.*

Démonstration. Divisons par N les N — 1 premiers multiples de 10, premiers avec N ; nous avons vu (n° 365) que *les résidus correspondants sont premiers avec* N.

Ces multiples sont

$$10 \cdot 1 \quad , \quad 10 \cdot \alpha \quad , \quad 10 \cdot \beta \; .... \quad 10 \cdot \theta \; .... \quad 10\ N - 1)$$

Et les résidus, indépendamment de l'ordre, sont

$$1 \quad , \quad \alpha \quad , \quad \beta \; .... \quad \theta \; .... \quad N - 1$$

Par le même mode de démonstration qu'au (n° 366), nous en déduirons encore, en désignant par i le nombre de ces résidus,

$$1 . \alpha . \beta . .. \theta ... N - 1) [10^i - 1) = \dot{N}$$

Or N est premier avec les divers résidus considérés, donc

$$10^i - 1 = \dot{N}$$

Ainsi le reste 1 qui se présente à la première division de 1 par N, se représentera à la $(i + 1)^{me}$ division ; donc m étant toujours le nombre des chiffres de la période,

$$i = \dot{m}$$

369. Théorème xv. *Généralisation du théorème de Fermat.*

Si D *est un nombre premier par rapport à* A, *et si* i *est le nombre des résidus inférieurs à* D, *on a*

$$A^i - 1 = \dot{D}$$

On démontre cette proposition en suivant le même raisonnement que pour le fameux théorème de Fermat qui n'en est même qu'un cas particulier, pour N = D.

Exemple. Soit D = 24, A = 7 ; on a la série suivante de résidus premiers avec 24,

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

Par suite,

$$i = 8, \quad \text{et} \quad 7^8 = 5764801$$

Et en effet 5764800 est divisible par 24.

370. Problème. *Combien y a-t-il de nombres inférieurs à un nombre donné et qui soient premiers avec lui.*

a, b et c étant les facteurs premiers du nombre N donné et α, β et γ leurs exposants respectifs, soit

$$N = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\delta}$$

Supposons qu'après avoir construit la suite des nombres entiers de 1 à N, on y supprime tous ceux qui ont des facteurs communs avec N ; les nombres qui resteront seront premiers avec N.

Commençons par supprimer les multiples de a contenus dans la série

$$a\,.\,1,\quad a\,.\,2,\quad a\,.\,3,\quad a\,.\,4,\ldots\quad a\,.\,\frac{N}{a} \qquad (1)$$

Cette suite contient $\frac{N}{a}$ termes, et ne laisse subsister dans celle des nombres naturels que

$$N - \frac{N}{a} \quad \text{ou} \quad N\left(1 - \frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

nombres différents premiers avec a.

Supprimons maintenant tous les multiples de b,

$$b\,.\,1,\quad b\,.\,2,\quad b\,.\,3,\ldots\quad b\,.\,a\ldots\quad b\,.\,\frac{N}{b} \qquad (3)$$

et, pour évaluer les termes qui resteront dans la suite numérique, remarquons que certains termes de (3) n'existent plus dans la suite des nombres, attendu qu'on les a effacés comme faisant partie de la série (1) des multiples de a ; il ne faut donc prendre de (3) que les termes dans lesquels le multiplicateur de b est premier avec a ; or la suite de ces multiplicateurs étant

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\ldots\quad \frac{N}{b} \qquad (4)$$

il est clair, d'après ce que nous avons déjà vu par les expres-



visions (1) et (2) que le nombre des termes de (4) qui sont premiers avec a est (en vertu de l'expression 2),

$$\frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

Du nombre (2) de la suite naturelle il restera donc

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

En continuant, par un raisonnement analogue, on trouvera la formule

$$n=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

ou bien en général et pour les facteurs *inégaux* $a, b, c, d.....$

$$n=N\,\frac{a-1}{a}\cdot\frac{b-1}{b}\cdot\frac{c-1}{c}\cdot\frac{d-1}{d}\cdots\cdots$$

371. Ce problème nous permet de résoudre la question très importante,

Déterminer une limite supérieure du nombre de chiffres d'une période simple.

Nous savons (nº 368) que, pour un dénominateur N premier avec 10, le nombre m des chiffres périodiques est *sous-multiple* du nombre des résidus moindres que ce dénominateur, et premiers avec N ; le nombre n qui vient d'être trouvé dans le paragraphe précédent est donc la limite supérieure de m.

Exemple. Soit la fraction

$$\tfrac{3}{91}=0{,}032967032967032967\cdots\cdot$$

On a

$$91 = 7 \cdot 13$$

Donc

$$n = N\,\frac{7-1}{7}\cdot\frac{13-1}{13}$$

d'où

$$n = 72.$$

Le nombre m des chiffres de la période sera donc 72, ou un diviseur de 72; et en effet la période a ici 6 chiffres.

372. *Génératrices des fractions périodiques dans un système quelconque de numération.*

Soient B la base d'un système de numération, et la fraction périodique

$$0\,,\alpha\,\beta\,\gamma\,....\,\varrho\,a\,b\,c\,d\,....\,p\,q\,a\,b\,c\,d\,....\,p\,q....$$

dont la partie non périodique a n chiffres, et la période m. Supposons que dans la division, qui fournit cette fraction, l'on s'arrête après un nombre π de périodes, et soit $\frac{P}{Q}$ la génératrice; le reste qui, divisé par B a donné le premier chiffre a périodique, est donc :

$$P\,B^{n} - Q\,.\,\alpha\,\beta\,\gamma.....\,\varrho.$$

Après un nombre quelconque de périodes complètes la fraction complémentaire à ajouter au quotient sera

$$\frac{P\,.\,B^{n} - Q\,.\,\alpha\,\beta\,\gamma....\,\varrho}{Q\,.\,B^{n+m\pi}}$$

On aura donc

$$\frac{P}{Q} = 0,\,\alpha\,\beta\,\gamma....abcd....\,pqabcd....\,pq....+\frac{P.B^{n}-Q.\alpha\beta\gamma....\varrho}{Q.B^{n+m\pi}}$$

D'où en multipliant de part et d'autre par $Q . B^{n+m\pi}$,

$$P.B^{n+m\pi} = Q.\alpha\beta\gamma...\varrho abcd...pqabcd...pq + P.Q^{n} . - Q.\alpha\beta\gamma...\varrho$$

Faisant, par soustraction, passer PB^{n} dans le premier membre, il viendra :

$$P[B^{n+m\pi} - B^{n}] = Q[\alpha\beta\gamma...\varrho\, abcd...pqabcd...pq - \alpha\beta\gamma...\varrho]$$

D'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha\beta\gamma...\varrho\, abcd...pq\, abcd...pq - \alpha\beta\gamma...\varrho}{B^{n+m\pi} - B^{n}}$$

Notons bien que la partie non périodique $\alpha\beta\gamma\pi...\varrho$ est suivie de πm chiffres, et que les premières, deuxième, troisième, etc., périodes sont suivies respectivement d'un nombre de chiffres

$$(\pi-1)m, (\pi-2)m, (\pi-3)m, ... [\pi-(\pi-1)]m, (\pi \quad \pi)m.$$

Le numérateur de la formule précédente se mettra dès lors sous la forme

$$\alpha\beta\gamma....\varrho.B^{m\pi} + abcd....pq[B^{(\pi-1)m} + B^{(\pi-2)m} + ...$$
$$+ B^{2m} + B^{m} + 1] - \alpha\beta\gamma....\varrho$$

Posons

$$\Delta = 1 + B^{m} + B^{2m} + B^{3m} + ... + B^{(\pi-2)m} + B^{(\pi-1)m}$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par B^{m}, il viendra :

$$\Delta . B^{m} = B^{m} + B^{2m} + B^{3m} + ... + B^{(\pi-1)m} + B^{\pi m}.$$

ou

$$\Delta . B^{m} = 1 + B^{m} + B^{2m} + \dots + B^{(\pi-1)m} + B^{\pi m} - 1$$

$$\Delta . B^{m} = \Delta + B^{\pi m} - 1$$

$$\Delta (B^{m} - 1) = B^{\pi m} - 1$$

$$\Delta = \frac{B^{\pi m} - 1}{B^{m} - 1}$$

Le numérateur de la génératrice prendra donc la forme

$$\alpha \beta \gamma \dots . \varrho (B^{m\pi} - 1) + a\, b\, c\, d \dots . p\, q\, \frac{B^{m\pi} - 1}{B^{m} - 1}$$

Par suite on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha \beta \gamma \dots . \varrho (B^{m} - 1) + a\, b\, c\, d \dots p\, q}{B^{n} (B^{m} - 1)}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha \beta \gamma \dots \varrho . B^{m} + a\, b\, c\, d \dots p\, q - \alpha \beta \gamma \dots \varrho}{B^{n} (B^{m} - 1)}$$

Or dans tout système l'unité précédée de m zéros représente la m^{e} puissance de la base B ; il s'en suit qu'à la droite de $\alpha \beta \gamma \dots \varrho$, dans le premier terme du numérateur on pourra au lieu de B^{m}, écrire m zéros ; ensuite on ajoutera le nombre résultant avec $a\, b\, c\, d \dots p\, q$ qui a m chiffres, et l'on aura enfin

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha \beta \gamma \dots \varrho\, a\, b\, c\, d \dots p\, q - \alpha \beta \gamma \dots \varrho}{B^{n} (B^{m} - 1)}$$

373. S'il s'agissait d'une fraction périodique simple, il suffirait de poser

$$\alpha\beta\gamma\ldots.\rho = 0,\ n = 0,\ B^n = 1$$

et l'on aurait

$$\frac{P}{Q} = \frac{abcd\ldots.pq}{B^m - 1}$$

Les deux formules générales que nous venons d'obtenir donnent pour $B = 10$, les règles connues et établies directement dans ce chapitre.

—

CHAPITRE III.

—

THÉORIES DES RACINES CARRÉE ET CUBIQUE.

—

Carré, racine carrée. — Définitions de la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré. — Carré d'une somme. — Différence de deux carrés consécutifs. — Carré d'un produit; racine carrée d'un produit. — Nombre de dizaines de la racine carrée d'un nombre entier. — Extraction de la racine carrée d'un nombre entier; condition à laquelle doit satisfaire un reste quelconque. — Nombre de chiffres de la racine. — Nombre des essais infructueux dans la recherche par division d'un chiffre de la racine, à partir du deuxième; maximum de ce nombre. — Racines carrées par excès; par défaut; les mêmes que les racines de même nom de la partie entière d'un nombre fractionnaire. — Achèvement par division de l'extraction de la racine carrée. — Caractères d'irrationnalité; pour un facteur premier α; pour 2; pour un nombre de zéros vers la droite d'un nombre donné; pour un nombre dont le chiffre d'unités est 2, 3, 7 ou 8; pour un nombre impair, par rapport à 4; pour un nombre dont le chiffre d'unités est 5. — Carré et racine carrée d'une fraction. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction irréductible soit un carré. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction quelconque soit un carré. — Extraction de la racine carrée d'une fraction; cas d'un dénominateur premier ou non premier; décomposition factorielle du numérateur. — Racine carrée d'un nombre fractionnaire ordinaire. — Racine carrée d'une expression décimale. — Cube, racine cubique. — Définition de la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube. — Cube d'une somme. — Différence de deux cubes consécutifs. — Cube d'un produit; racine cubique d'un pro-

duit. — Nombre de dizaines de la racine cubique d'un nombre entier. — Extraction de la racine cubique d'un nombre entier; condition à laquelle doit satisfaire un reste quelconque; dispositif nouveau et très-simple. — Nombre de chiffres de la racine. — Nombre des essais infructueux dans la recherche par division d'un chiffre de la racine, à partir du deuxième; maximum de ce nombre. — Racines cubiques par excès; par défaut; les mêmes que les racines de même nom de la partie entière d'un nombre fractionnaire. — Achèvement par division de l'extraction de la racine cubique. — Caractères d'irrationnalité; pour un facteur premier x; pour 2; pour un nombre de zéros vers la droite d'un nombre donné; pour un nombre pair divisible par une seule fois 8, et dont le chiffre des unités est 2 ou 6, 4 ou 8; pour un nombre impair, par rapport à 8; pour un nombre dont le chiffre d'unités est 5. — Cube et racine cubique d'une fraction. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction *irréductible* soit un cube. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit un cube. — Extraction de la racine cubique d'une fraction; cas d'un dénominateur premier, ou non premier; décomposition factorielle du numérateur. — Racine cubique d'un nombre fractionnaire ordinaire. — Racine cubique d'une expression décimale. — Approximation des racines carrées et cubiques à moins de $\frac{1}{n}$ près; à moins de $\frac{1}{10^k}$ près. — Cas où le degré d'approximation n'est pas fixé; approximations successives.

374. Nous avons déjà dit ailleurs (n° 56) que *l'on entend par carré* ou seconde puissance d'un nombre, *le produit de ce nombre par lui-même*.

Inversement ce nombre, considéré par rapport à son carré, porte le nom de *racine carrée*.

En formant les carrés des nombres entiers consécutifs, on construira les deux suites

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \text{etc.}$$
$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \text{etc.}$$

La seconde ligne, qui contient les carrés consécutifs, montre à l'instant qu'*un nombre entier quelconque compris*

entre deux termes de la suite, ne correspond pas à un nombre entier de la première ligne.

On voit donc qu'il existe certains nombres entiers que l'on ne peut considérer comme produits de deux facteurs entiers égaux; prouvons que ces deux facteurs ne peuvent être fractionnaires, c'est à-dire :

THÉORÈME I. *Tout nombre entier, compris entre deux carrés consécutifs, n'est la seconde puissance d'aucun nombre commensurable.*

Démonstration. Soit N le nombre donné; admettons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ que l'on peut toujours supposer *irréductible* donne

$$\frac{a^2}{b^2} = N.$$

Mais (n° 156) lorsque deux nombres a et b sont premiers, leurs puissances le sont également donc $\frac{a^2}{b^2}$ est une fraction irréductible, ce qui rend impossible l'égalité entre un nombre entier et un nombre fractionnaire.

On en conclut que $\sqrt{N}$ n'est ni entier ni fractionnaire et que cette racine est un nombre *incommensurable* ou *irrationnel*.

375. Il faut donc dans ce cas attacher à $\sqrt{N}$ un sens tout différent de celui d'*un nombre pris deux fois comme facteur :* lorsque N n'est pas un carré on dit que *la racine carrée de ce nombre est la racine du plus grand carré entier contenu dans* N.

Ainsi la racine de 13 est 3, parceque 3^2 ou 9 est le plus grand carré inférieur à 13; seulement cette racine *conventionnelle*, pour ainsi dire, est exprimée en unités simples, tandis qu'on pourrait la désirer en fonction d'une unité décimale quelconque, ou même d'une fraction quelconque.

Nous n'acceptons pas la dénomination de *carré parfait* généralement reçue, attendu qu'un nombre est ou n'est pas un carré, et qu'il est tout-à-fait inutile d'ajouter le mot *parfait* pour qualifier des nombres dont une catégorie différente ne possède pas la propriété d'être le produit de deux facteurs égaux.

376. Théorème ii. *Le carré de la somme de deux nombres se compose du carré du premier, plus le double produit du premier par le second, plus le carré du second.*

Démonstration. Soit $(a + b)$ la somme proposée; par le (nº 63) on aura

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = (a + b)\,a + (a + b)\,b$$

Puis en vertu du (nº 49) :

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(*c.q.f.d.*)

377. Corollaire i. *La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est supérieure d'une unité au double du plus petit.*

Soient a et $a + 1$ ces deux nombres pour lesquels on a (nº 376),

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

ou

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1 \qquad (c.q.f.d.)$$

378. Corollaire ii. *Le carré d'un nombre, décomposé en dizaines et en unités, se compose du carré des dizaines, plus le double produit des dizaines par les unités, plus le carré des unités.*

379. Théorème iii. *Le carré d'un produit est le produit des carrés des facteurs.*

Démonstration. Soit le produit

$$P = abcd \dots pq$$

D'où

$$P^2 = abcd \dots pq \times abcd \dots pq$$

ou bien en rapprochant les facteurs égaux, à l'aide de l'interversion permise des facteurs

$$P^2 = a.a \times b.b \times c.c \times d.d \times \ldots \times p.p \times q.q.$$

ou

$$P^2 = a^2\, b^2\, c^2\, d^2 \ldots\, p^2\, q^2 \qquad (c.q.f\,d.)$$

L'élévation au carré a donc pour résultat de *doubler* l'exposant de chaque facteur.

On déduit aussi de là que :

La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées de ses facteurs ; les exposants des divers facteurs seront donc divisés par 2.

380. Théorème iv. *Le plus grand carré contenu dans un nombre* a *est celui dont la différence à ce nombre est moindre que le double de sa racine augmenté d'une unité.*

Démonstration. Soit b la racine de ce plus grand carré par lequel on a

$$a - b^2 < 2b + 1$$

D'où

$$a < b^2 + 2b + 1, \text{ ou } a < (b+1)^2$$

Et l'on a

$$b^2 < a < (b+1)^2 \qquad (c.q.f.d.)$$

381. Lorsqu'un nombre est plus petit que 100, la table de multiplication donne à l'instant le plus grand carré qui lui est inférieur; mais si le nombre est plus grand que 100, et lorsque, par suite, sa racine a au moins 2 chiffres, on comprend que, dans l'impossibilité de prolonger la table de Pythagore, on soit obligé de recourir à une autre méthode qui repose sur le

Théorème v. *Le nombre des dizaines de la racine du plus grand carré contenu dans un nombre donné est égal à la ra-*

cine carrée du plus grand carré contenu dans le résultat que l'on obtient en supprimant dans le nombre donné les deux premiers chiffres de droite.

Démonstration. Soit le nombre

$$N = p\ldots\ fedcba$$

La racine de ce nombre qui a plus de deux chiffres, contient des dizaines dont le nombre est la racine du plus grand carré inférieur à

$$N' = p\ldots\ fedc$$

Tel est le point à établir. — Pour cela si R représente la racine du plus grand carré contenu dans N', on a :

$$R^2 < N' < (R+1)^2 \qquad (1)$$

Multiplions par 100 ou par 10^2,

$$R^2 \,.\, 10^2 < p\ldots.\ fedc\,0\,0 < (R+1)^2\, 10^2\ldots. \qquad (2)$$

Prouvons que sans troubler l'inégalité (2), *on peut y remplacer* les deux zéros qui se trouvent à la droite de N' par la tranche *b a* des deux premiers chiffres de droite de N.

Entre les nombres entiers N' et $(R+1)^2$ de l'expression (1) il y a *au moins* une *unité de différence;* donc en passant à (2), cette différence *centuplée* sera au moins égale à 100 et par suite si l'on augmente le plus petit nombre N'. 100 d'un nombre *b a* moindre que 100, on aura encore :

$$R^2 .\, 10^2 < N < (R+1)^2\, 10^2$$

Et en passant aux racines carrées, on obtient :

$$R\,.\,10 < \sqrt{N} < (R+1)\,10 \qquad (c.q.f.d.)$$

382. Problème. *Extraire la racine carrée du nombre*

$$N = p\ldots\ khgfedcba$$

Puisque N a plus de deux chiffres, $\sqrt{N}$ a des dizaines que nous obtiendrons en cherchant la racine du nombre

$$N' = p.... \, khgfedc$$

que l'on forme en supprimant dans N la première tranche ba ; généralement N' ayant aussi plus de deux chiffres, $\sqrt{N'}$ en aura plus d'un, et pour déterminer les dizaines de cette nouvelle racine, on devra chercher le plus grand carré contenu dans

$$N'' = p.... \, khgfe$$

En continuant à raisonner de la sorte, on est amené à *partager de droite à gauche, le nombre N en tranches de deux chiffres* et à rechercher enfin la racine du plus grand carré que contient la dernière tranche à gauche (complète ou incomplète, c'est-à-dire ayant deux, ou un chiffre).

Cette dernière racine sera la caractéristique d'ordre le plus élevé de $\sqrt{N}$

En effet nous venons de prouver que

1° $\sqrt{N'}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt{N}$

2° $\sqrt{N''}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt{N'}$, ou le nombre de centaines de $\sqrt{N}$

3° $\sqrt{N'''}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt{N''}$, ou le nombre de mille de $\sqrt{N}$ et ainsi de suite.

En général on voit donc que

Le nombre d'unités d'un ordre (i) *assigné de la racine carrée d'un nombre donné est égal à la racine du plus grand carré contenu dans le résultat que l'on obtient en supprimant sur la droite du nombre les* i — 1 *premières tranches de deux chiffres.*

Représentons ces diverses tranches par

$$t, \ t' \ t'' \ t'''.... \ T$$

en allant de gauche à droite. Soit α la racine du plus grand carré moindre que t; *α qui est le chiffre de gauche de* $\sqrt{N}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt{tt'}$.

De t retranchons le carré α^2 de α, et à la droite du reste obtenu écrivons la tranche t'. Le nombre R_1 ainsi formé contient le double produit des dizaines α par les unités de $\sqrt{tt'}$; or ce double produit ne pouvant se trouver que dans les dizaines de R_1, divisons ces dernières par 2α.

Le quotient β, qui en résulte est égal ou supérieur au second chiffre de $\sqrt{N}$: pour vérifier ce chiffre β, on effectue les produits β^2 et $2\alpha\beta$ ainsi que leur somme que l'on retranche de R_1; si cette soustraction est impossible, β est le second chiffre de $\sqrt{N}$, mais s'il en est autrement il faut recommencer les essais sur $\beta - 1$, puis sur $\beta - 2$ si $\beta - 1$ était trop fort, et diminuer suffisamment ainsi β pour que le double produit des dizaines par les unités, augmenté du carré des unités soit contenu dans R_1.

Pour exécuter ces essais avec méthode et avec promptitude, on forme 2α puis on écrit à la droite le chiffre β à essayer, et l'on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre essayé

Supposons donc que β soit le deuxième chiffre de $\sqrt{N}$.

A la droite du reste, obtenu par la recherche et l'essai de β, abaissons la tranche t''; il en résulte un nombre R_2 que nous divisons par $2\ (\alpha\beta)$, et dont le quotient γ est supérieur ou égal au troisième chiffre. On détermine la valeur exacte du troisième chiffre par un essai pour lequel on procède comme suit : on double le nombre $\alpha\beta$, on écrit à la droite de ce double produit le nombre à essayer, et l'on multiplie le nombre résultant par le chiffre essayé lui-même; si ce produit est supérieur à R_2, le chiffre γ est trop fort, et il faudra le diminuer d'un nombre suffisant d'unités.

On déterminera d'une manière analogue les différents chiffres de $\sqrt{N}$.

383. Remarque i. *L'un quelconque des restes successifs de l'extraction qui vient d'être développée ne peut jamais surpasser le double de la partie déjà trouvée à la racine.*

En effet, le plus grand carré contenu dans N ne peut (n° 377), différer de N que d'une quantité tout au plus égale au double de la racine de ce carré.

384. Remarque ii. L'établissement du procédé d'extraction qui précède montre que

Le nombre de chiffres de la racine est égal au nombre de tranches de deux chiffres dans lesquels on peut partager le nombre proposé.

Voici du reste comment on établit directement cette vérité :

Le plus petit nombre de n chiffres est l'unité numérative du n^e ordre, ou 1 précédé de $n-1$ zéros, ou 10^{n-1}; son carré est 1 précédé de $2(n-1)$ ou $2n-2$ zéros, et ce carré est le plus petit nombre de $2n-2+1$ ou $2n-1$ chiffres.

D'autre part, le plus petit nombre de $n+1$ chiffres étant 1 précédé de n zéros, ou 10^n, son carré est l'unité précédé de $2n$ zéros ; ce nouveau carré est le plus petit nombre de $2n+1$ chiffres. On voit donc que tous les nombres de $2n-1$ et de $2n$ chiffres sont compris entre $(10^{n-1})^2$ et $(10^n)^2$; par suite les racines de ces nombres sont comprises entre les racines de ces limites, ou entre 10^{n-1} et 10^n : donc la racine d'un nombre de $2n-1$ ou de $2n$ chiffres a n chiffres, c'est à dire autant de chiffres que de tranches de deux chiffres dans le nombre donné (la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre).

385. La racine déterminée, comme nous l'avons indiqué ci-dessus est telle que si on l'augmente de 1, son carré sera

supérieur au nombre donné ; c'est ce qui a fait dire que *cette racine est obtenue à moins d'une unité près.*

On peut donc formuler cette règle :

Pour extraire à moins d'une unité près la racine carrée d'un nombre entier, on le partage en allant de droite à gauche en tranches de deux chiffres. Le premier chiffre de la racine est la racine du plus grand carré entier contenu dans la première tranche à gauche; on retranche ce carré de cette tranche, et à la droite du reste on abaisse la tranche suivant; on divise les dizaines du nombre formé par le double du premier chiffre.

A titre de deuxième chiffre on essaie le quotient de cette division; si le carré du nombre que forment le premier chiffre de la racine et ce quotient, est contenu dans l'ensemble numérique des deux premières tranches de gauche, ce quotient sera le deuxième chiffre de la racine. S'il en est autrement on diminuera ce quotient d'assez d'unités pour que cette condition soit satisfaite.

A la droite du reste provenant de la vérification du second chiffre on abaisse la troisième tranche et l'on divise les dizaines du nombre formé par le double de la partie déjà trouvée de la racine ; on essaie le quotient résultant en voyant si le carré du nombre que forme la partie déterminée à la droite de laquelle on écrit ce quotient, est contenu dans le nombre résultant de l'ensemble des trois premières tranches; si cette condition n'est pas remplie on diminue le quotient.

On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait successivement abaissé toutes les tranches. Le RESTE *de l'extraction est le dernier reste obtenu : si ce reste est* NUL, *le nombre proposé est un* CARRÉ ; *dans le cas contraire on a seulement la partie entière de cette racine, ou bien sa valeur* PAR DÉFAUT *à moins d'une unité près.*

Voici le dispositif des opérations d'une extraction de racine carrée d'un nombre entier :

6,08,93,52	2467
4	
208	44.4
176	486.6
3293	4927.7
2916	
37752	
34489	
3263	

386. Quand on a trouvé un ou plusieurs chiffres de la racine carrée d'un nombre entier et que l'on cherche à déterminer le chiffre suivant, on effectue une division dont le quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort. Proposons-nous ce

Problème. *Quel est le* maximum *de l'excès d'un quotient* d'essai *sur le véritable chiffre correspondant de la racine.*

Désignons par a la partie déjà trouvée de la racine et par b le chiffre nouveau ; soit N le nombre formé par toutes les tranches déjà employées, y compris celle nécessaire à la détermination de b.

a est donc le nombre de dizaines et b le nombre d'unités de $\sqrt{N}$; c'est-à-dire que à moins d'une unité près, l'on a

$$\sqrt{N} = a \cdot 10 + b$$

Le reste R à la suite duquel est écrite la dernière tranche de N est donc

$$R = N - a^2 \cdot 100$$

Et le diviseur $2a$ auquel donne lieu ce reste, fournit après certains essais le chiffre b.

Remarquons que tous les nombres entiers compris entre

$$(a\,.\,10+b)^2 \quad \text{et} \quad [\,a\,.\,10+(b+1)\,]^2-1$$

ont, *à moins d'une unité près*, la même racine $a\,.\,10+b$; en effet, si l'on retranche le carré de $a\,.\,10+b$ du second de ces nombres, on aura

$$(a.10+b+1)^2-1-(a.10+b)^2=(a.10+b)^2+2\,(a.10+b)$$
$$+1-1-(a.10+b)^2$$

ou

$$(a.10+b+1)^2-1-(a.10+b)^2=2\,(a.10+b)$$

Et comme il a été établi (n° 380), que *le plus grand carré contenu dans un nombre donné est celui dont la différence à ce nombre est moindre que le double de sa racine, augmenté d'une unité*, il est clair que la plus grande valeur de N est :

$$(a.10+b+1)^2-1=a^2.100+2a.10\,(b+1)+(b+1)^2-1$$

La plus grande valeur du dividende, en y comprenant la tranche abaissée est donc

$$\mathrm{D}=2\,a.10\,(b+1)+(b+1)^2-1$$

Comme 99 est évidemment le maximum de $(b+1)^2-1$, en représentant par k le nombre de dizaines de D on aura toujours

$$k \leqq 2\,a\,(b+1)+9$$

Exécutons, selon la règle d'extraction, la division de k par $2\,a$, et nous aurons pour quotient L :

$$\mathrm{L} \leqq b+1+\frac{9}{2\,a}$$

D'où

$$L - b \leqq 1 + \frac{9}{2a}$$

Le second membre de cette expression donne pour chaque chiffre une limite supérieure du nombre d'essais infructueux que l'on peut avoir à faire pour déterminer un chiffre de la racine.

Lorsque a n'a qu'un chiffre la valeur maximum de $L - b$ correspond à $a = 1$; on a alors

$$\text{maximum de } (L - b) \leqq 1 + \frac{9}{2}$$

Ce maximum peut donc être égal à 5.

Le minimum de $L - b$ aura lieu pour $a \geqq 5$, car alors

$$\text{minimum } (L - b) \leqq 1 + \frac{9}{10}$$

Ce minimum est donc 1, et convient aussi au cas où la partie a de la racine a plus de deux chiffres.

On a donc *en général* cette règle :

THÉORÈME VI. *Le nombre d'unités dont on peut faire erreur, par division, dans la détermination d'un chiffre de la racine est supérieure de 1 au plus grand nombre de fois que le double de la partie déjà déterminée est contenu en 9.*

387. Le cas de $a \geqq 5$ qui donne 1 pour maximum d'erreur fournit le

THÉORÈME VII. *L'erreur possible commise par division, dans l'extraction d'une racine carrée, est 1 lorsque la partie déjà connue est au moins égale à 5; et c'est ce qui a nécessairement lieu à partir du troisième chiffre de la racine.*

388. Conformément à la formule générale nous avons trouvé que 5 *serait* le maximum de l'erreur possible $L - b$; il est à remarquer que cette limite 5 est *beaucoup trop forte*

et c'est ce que l'on met en évidence en calculant la valeur de $L - b$ pour les premiers nombres.

En divisant par $20a$ la valeur de D trouvée (n° 386), on obtiendra :

$$\alpha = b + 1 + \frac{(b+1)^2 - 1}{20a}$$

Plaçons nous, par rapport à a dans le cas le plus défavorable et considérons $a = 1$; on aura donc

$$\alpha' - b = 1 + \frac{(b+1)^2 - 1}{20}$$

Lorsque le chiffre inconnu b doit être 7, 8, ou 9 il est clair que les nombres maximum possibles d'essais infructueux sont respectivement 2, 1 et 0.

Il suffira donc de donner à b les valeurs des 7 premiers chiffres et l'on aura

Pour $b =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
$\alpha' - b \overline{\gtrless}$	1,	1,	1,	1,	2,	2,	3

Si l'on suppose $a > 1$, toutes ces conséquences sont vraies *a fortiori*, d'où l'on déduit le

THÉORÈME VIII. *Le nombre 3 est le maximun du nombre d'essais infructueux que l'on peut devoir faire dans la détermination par division d'un chiffre quelconque de la racine carrée.*

389. *Observation générale.* Soit N un nombre fractionnaire, N' la partie entière de ce nombre et R^2 le plus grand carré contenu dans N' ; on a la relation

$$R^2 < N' < (R+1)^2$$

Or comme entre les nombres *entiers* N' et $(R+1)^4$ il y a au moins 1 de différence, on pourra augmenter le nombre



intermédiaire N′ d'une quantité moindre que 1 sans que l'inégalité cesse d'exister; et c'est ce qui donnera

$$R^2 < N < (R+1)^2$$

D'où l'on peut conclure la généralisation de la définition :

La racine carrée, à moins d'une unité, d'un nombre entier ou fractionnaire est la racine du plus grand carré entier contenu dans ce nombre ou dans la partie entière de ce nombre.

On est convenu de dire que R *est la racine* PAR DÉFAUT *à moins d'une unité;* et que $R+1$ *est la racine* PAR EXCÈS *à moins d'une unité.*

390. THÉORÈME IX. *Selon que le reste final* π *de l'extraction est contenu, ou est plus grand que la racine calculée, la valeur de* $\sqrt{N}$ *est à moins d'une* DEMI-*unité près* PAR DÉFAUT *ou* PAR EXCÈS.

Démonstration. On a

$$N = a^2 + \pi$$

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4}$$

D'où par division

$$\frac{N}{(a+\frac{1}{2})^2} = \frac{a^2+\pi}{a^2+a+\frac{1}{4}}$$

1° Si $\pi < a$, le second membre de cette égalité est plus petit que 1, donc

$$N < (a+\tfrac{1}{2})^2, \text{ et par suite } R < a + \tfrac{1}{2}.$$

2° Si $\pi > a$, le second membre est plus grand que 1, donc

$$N > (a+\tfrac{1}{2})^2, \text{ et par suite } R > a + \tfrac{1}{2} \qquad c.q.f.d.$$

391. *Achèvement par division de l'extraction de la racine carrée.* — Lorsque l'on a déjà déterminé *la moitié plus un* du nombre de chiffres de la racine, on peut par une simple division dont les éléments sont déjà fournis par l'extraction, obtenir la dernière partie de la racine.

En effet soit a la partie connue, et b celle qu'il faut encore trouver.

1° Supposons que la racine R ait un nombre impair de chiffres représenté par $2n+1$; que a ait $n+1$ et b, n chiffres.

Le nombre N fournit dès lors la relation

$$N = (a.10^n + b)^2 = a^2 . 10^{2n} + 2ab.10^n + b^2$$

D'où

$$Q = \frac{N - a^2 . 10^{2n}}{2a \cdot 10^n} = b + \frac{b^2}{2a\,10^n} \;\ldots\ldots \quad (1)$$

b et a ayant respectivement n et $n+1$ chiffres satisfont aux inégalités

$$\left.\begin{array}{l} b^2 < 10^{2n} \\ a \overline{\overline{>}} 10^n \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

Sous l'empire des relations (2) cherchons le maximum de l'*excès* du quotient $\frac{N - a^2 . 10^{2n}}{2a \cdot 10^n}$ sur b ; il est clair que ce maximum ne pourra être supérieur à la valeur que prend $\frac{b^2}{a.10^n}$ lorsque l'on donne simultanément au dénominateur la plus petite valeur et au numérateur la plus grande; on aura donc,

$$\text{maximum de } \frac{b^2}{2a \,.\, 10^{2n}} < \frac{10^{2n}}{2.10^n.10^n} \text{ ou } \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}$$

On voit donc que *la partie entière* du quotient complet Q *est égale à la portion* b *encore inconnue de la racine.*

2° Si l'on supposait que la racine R ait un nombre *pair* de chiffres, on aurait $a > 10^{n-1}$, et par conséquent on aurait.

$$\text{maximum de } \frac{b^2}{2a \cdot 10^n} \cdot \overline{\overline{<}} \frac{10^{2n}}{2 \cdot 10^{n-1} \cdot 10^n} = 5$$

Enonçons donc ce beau

Théorème x. *La première moitié plus un du nombre des chiffres d'une racine carrée étant trouvée, l'autre partie de cette racine est le quotient entier du reste auquel on est arrivé par le double de la partie obtenue.*

—

CARACTÈRES D'IRRATIONNALITÉ.

392. Lorsqu'un nombre est un carré, on reconnait et l'on démontre que *certaines conditions* sont satisfaites, et que dans le cas contraire ces mêmes conditions ne le sont pas.

On donne le nom de *caractère d'irrationnalité* à des propriétés qui assurent l'incommensurabilité ou l'irrationnalité de la racine.

393. Théorème xi. *Un nombre dont le chiffre d'unité est* 2, 3, 7 *ou* 8 *n'est pas un carré.*

Démonstration. Nous avons établi (n° 378) que le carré d'un nombre décomposé en dizaines et en unités est la somme du carré des dizaines, du double produit des dizaines par les unités et du carré des unités : or le carré des dizaines et le double produit des dizaines par les unités ne peuvent contenir d'unités, donc dans l'élévation d'un nombre au carré *le chiffre d'unité du carré est celui du carré du chiffre d'unité du nombre donné;* et si l'on considère la suite des dix premiers carrés entiers

0, 1, 4, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Il devient évident que les chiffres 2, 3, 7 et 8 ne peuvent jamais appartenir à un carré comme chiffre de droite.

394. Théorème xii. *Un nombre ayant 5 pour premier chiffre à droite ne peut être un carré, s'il n'a 2 pour second chiffre.*

Démonstration. La racine du nombre N donné a évidemment aussi 5 pour premier chiffre de droite, et étant ainsi divisible par 5, représentons par n un nombre entier tel que

$$R = \sqrt{N} = n \cdot 5$$

R ayant n dizaines et 5 unités, on aura en vertu de la propriété (nº 378),

$$N = (n.10 + 5)^2 = n^2.100 + 2.10.n.5 + 25$$

ou

$$N = n^2.100 + n.100 + 25$$

$$N = \dot{\overline{100}} + 25. \qquad (c.q.f.d.)$$

395. Théorème xiii. *Un nombre donné divisible par un nombre premier α, ne peut être un carré, s'il ne l'est également par α^2.*

Démonstration. Soit N un carré ayant le nombre premier α pour diviseur et dont R est la racine; d'où

$$N = R \cdot R$$

Or α divisant N doit diviser le second membre; d'où l'on déduit, p étant un nombre entier convenable que

$$R = p\ \alpha$$

Donc

$$N = p^2\ \alpha^2 \qquad (c.q.f.d.)$$

396. Corollaire i. *Un nombre pair ne peut-être un carré, s'il n'est divisible par 4.*

397. Corollaire ii. *Un nombre ayant à sa droite un nombre* impair *de zéros, n'est pas un carré.*

Soit le nombre

$$abcd00000 = abcd.10^5 = abcd.10^4 \times 10.$$

Le nombre 10 n'étant pas sous-multiple de $a\,b\,c\,d$, et 10, étant le carré de 10^2, il est impossible que le produit $abcd \times 10$ devienne un carré puisque 10 étant divisible par les seuls nombres 2 et 5 il faudrait que $abcd$ admit également ces mêmes diviseurs : or dans ce cas d serait *nul* et le nombre proposé aurait *six* zéros à sa droite.

(*c.q.f.d.*)

398. Théorème xiv. *Un nombre impair qui, diminué de 1, n'est pas divisible par 4, ne peut-être un carré.*

Démonstration. La racine carrée d'un nombre impair N ne pouvant être qu'impaire, a la forme $2n+1$ (n étant un nombre entier); on aura donc

$$N = (2n+1)^2 = 4n \quad + 4n + 1 \qquad (c.q.f.d.)$$

DU CARRÉ ET DE LA RACINE CARRÉE D'UNE FRACTION.

399. Quels que soient a et b, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

d'où

Théorème xv. *Le carré d'une fraction s'obtient en élevant au carré son numérateur et son dénominateur.*



400. Théorème xvi. *La racine carrée d'une fraction s'obtient en extrayant celle du numérateur et celle du dénominateur.*

401. Théorème xvii. *Pour qu'une fraction irréductible soit un carré, il faut et il suffit que ses deux termes soient des carrés.*

Démonstration. Supposons qu'une fraction irréductible $\frac{A}{B}$ puisse être le carré d'une autre fraction que l'on peut toujours aussi admettre irréductible; on doit donc avoir

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\frac{a^2}{b^2}$ est aussi irréductible; or (n° 199) deux fractions irréductibles égales sont identiques, douc on a comme *condition nécessaire*

$$A = a^2, \text{ et } B = b^2 \qquad c.q.f.d.$$

Réciproquement si ces dernières conditions sont satisfaites, on en déduit par division

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

C'est-à-dire que $\frac{A}{B}$ est alors un carré et que la *condition* est *suffisante.*

402. Théorème xviii. *Une fraction est un carré lorsque le produit de ses deux termes est un carré.*

Démonstration. Admettons que $\frac{A}{B}$ soit le carré d'une fraction $\frac{x}{y}$, ou

$$\frac{A}{B} = \frac{x^2}{y^2}$$

D'où en multipliant par B^2 les deux membres de cette égalité,

$$A.B = \frac{B^2 x^2}{y^2} = \left(\frac{B x}{y}\right)^2$$

A B est le produit des deux termes de la fraction proposée et l'on voit que ce produit est un carré, toutes les fois que $\frac{B x}{y}$ est un nombre entier. Cette condition *nécessaire*, est aussi *suffisante;* car réciproquement supposons que l'on ait

$$A B = C^2$$

En divisant par B les deux membres de cette égalité, on obtiendra :

$$\frac{A}{B} = \frac{C^2}{B^2} = \left(\frac{C}{B}\right)^2$$

Et l'on voit que $\frac{A}{B}$ est le carré d'une fraction $\frac{C}{B}$; la condition est donc *suffisante.*

403. Le carré d'une fraction ou d'un nombre fractionnaire ne peut (n° 374) être un nombre entier; donc si une fraction n'est pas le carré d'une autre fraction, sa racine est irrationnelle.

404. Du théorème XVI (n° 400), il résulte que,

Pour extraire la racine carrée d'une fraction on extrait les racines carrées du numérateur et du dénominateur; si ces termes sont des carrés le quotient de la première racine par la seconde, est la racine de la fraction proposée.

Exemple : Soit la fraction $\frac{36}{169}$; on remarque que

$$36 = 6^2,\ 169 = \overline{13}^2$$

Donc

$$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}$$

403. Quand le dénominateur n'est pas un carré, on pourra *indiquer* la racine de chacun des termes de la fraction ; ainsi

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

Le dénominateur de la racine étant alors irrationnel ne pourra être évalué qu'avec une *approximation* plus ou moins grande ; un tel dénominateur n'indique donc plus le nombre *précis* de parties égales dans lesquelles on a divisé l'unité et n'a plus de sens au point de vue arithmétique. Il faut, pour ne pas tomber dans cet embarras, transformer préalablement la fraction proposée : cette transformation a pour but d'obtenir un carré pour nouveau dénominateur.

A cet effet, soit en général la fraction irréductible

$$\frac{A}{B} = \frac{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}}{p^{2\delta}\, q^{2\varepsilon+1}\, r^{2\pi+1}\, s^{2\theta}\, t^{2\rho+1}}$$

Nous savons qu'un nombre B, décomposé en facteurs premiers p, q, r, s, t, est un carré quand (nº 379), ces facteurs ont pour exposants des nombres pairs : ici les exposants $2\varepsilon + 1$, $2\pi + 1$, $2\rho + 1$ des facteurs q, r et t étant impairs il suffira de multiplier les deux termes de la fraction par q, r, t pour que le nouveau dénominateur soit un carré.



On aura ainsi

$$\frac{A}{B} = \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} q r t}{p^{2\delta} q^{2(\varepsilon+1)} r^{2(\pi+1)} s^{2\theta} t^{2(\rho+1)}}$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} q r t}}{p^{\delta} q^{\varepsilon+1} r^{\pi+1} s^{\theta} t^{\rho+1}}$$

Lorsque le dénominateur B est un nombre *premier* cette transformation se réduit à multiplier les deux termes par le dénominateur, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A\,B}{B^2}} = \frac{1}{B}\sqrt{A\,B}$$

On aurait ainsi :

1° Pour la racine de $\frac{5}{7}$,

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$$

2° Pour la racine de $\frac{3240}{1288651}$, la décomposition en facteurs premiers fournit

$$3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$
$$1288651 = 7^3 \cdot 13 \cdot 17^2$$

Il faudra donc multiplier les deux termes de la fraction donnée par $7 \cdot 13$, ce qui fournira

$$\sqrt{\frac{3240}{1288651}} = \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}}{7^2 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{\sqrt{294840}}{10829}$$



Nous pouvons donc installer cette règle :

Pour extraire la racine carrée d'une fraction que l'on a d'abord, s'il y a lieu rendue irréductible, décomposez le dénominateur en ses facteurs premiers ; multipliez ensuite les deux termes par le produit des premières puissances de ces facteurs premiers qui ont des exposants impairs; extrayez ensuite la racine carrée du produit auquel donne lieu le numérateur; puis enfin divisez la racine obtenue par le produit des facteurs premiers du dénominateur affectés d'exposants moitié moindres que les exposants primitifs RENDUS PAIRS.

406. Cette règle ne parle pas de la décomposition du numérateur en facteurs premiers ; c'est qu'en effet cette partie du travail numérique tel qu'il a été présenté dans l'exemple du paragraphe précédent *n'est pas indispensable* quant au but de la transformation, *qui agit sur le dénominateur.*

Dans l'exemple dont nous parlons nous pouvons écrire

$$\sqrt{\frac{3240}{288651}}=\frac{\sqrt{2^3.4^4.5.7.13}}{7^2.13.17}=\frac{1}{10829}\sqrt{2^2.3^4\times 2.5.7.13}$$

Mais la racine carrée du produit des facteurs $2^2.3^4$ et $2.5.7.13$ étant égale (nº 379) au produit des racines de ces facteurs, on aura

$$\sqrt{\frac{3240}{1288651}}=\frac{1}{10829}\sqrt{2^2.3^4}.\sqrt{2.5.7.13}$$

Pour extraire la racine d'un produit $2^2.3^4$ il faut (nº 379) en sous-doubler les exposants; d'où

$$\sqrt{\frac{3240}{1288651}}=\frac{2.3^2}{10829}\sqrt{2.5.7.13}=\frac{18}{10829}\sqrt{910}$$

On voit quelle simplicité cette décomposition factorielle apporte à l'extraction, qui ne traite plus en général qu'un petit nombre comparativement à celui de la règle.

407. *Pour extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire, il faut transformer l'expression en fraction à deux termes, puis opérer comme on vient de le dire.*

408. Occupons-nous maintenant des fractions décimales, et remarquons que le carré de l'unité précédée d'un nombre *n* de zéros, est égal à 1 précédé de 2 *n* zéros.

Considérons l'expression décimale

$$N, abcdefgh$$

En partageant la partie décimale de la gauche vers la droite en tranches de deux chiffres, à partir de la virgule, et en complétant par un zéro la dernière tranche qui pourrait être incomplète, il viendra :

$$N, abcdefgho = Nabcdefgho \times \frac{1}{100000000} = N abcdefgho \times \left(\frac{1}{10000}\right)^2$$

D'où par la propriété (n° 379),

$$\sqrt{N, abcdefgh} = \frac{1}{10000}\sqrt{Nabcdefgho}$$

Donc en règle :

Pour extraire la racine carrée d'une expression décimale rendez pair, s'il y a lieu, par un zéro, le nombre de chiffres décimaux de l'expression ; extrayez ensuite la racine en faisant abstraction de la virgule et sur la droite du nombre entier ainsi obtenu mettez une virgule au rang marqué par le nombre de tranches décimales de deux chiffres (complètes ou incomplètes) que contient le nombre proposé.

Exemple. Soit 5,5021677489

$$\sqrt{5,5021677489} = \frac{\sqrt{55021677489}}{100000} = \frac{234567}{100000} = 2,34567$$

Si, abstraction faite de la virgule, le nombre proposé a moins de chiffres à sa racine que ne l'indique son nombre de tranches décimales de deux chiffres, nous avons vu (n° 273) comment il faut placer la virgule.

Ainsi

$$\sqrt{0,0000003136} = \frac{\sqrt{3136}}{100000} = 0,00056$$

—

DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE.

409. On sait que le *cube*, ou la 3ᵉ puissance d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre, qui réciproquement porte le nom de *racine cubique* du cube donné. Les nombres entiers consécutifs donnent lieu par élévation au cube, aux deux suites correspondantes par colonnes verticales :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10, etc.
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000, etc.

La série des cubes prouve *qu'un nombre entier quelconque compris entre deux cubes consécutifs n'a pas de racine entière.* Il existe donc certains nombres entiers que l'on ne peut regarder comme produits de trois facteurs entiers égaux; prouvons que ces facteurs ne peuvent être fractionnaires, c'est-à-dire que

THÉORÈME XIX. *Tout nombre entier, compris entre deux cubes consécutifs, n'est la troisième puissance d'aucun nombre commensurable.*

Démonstration. Soit N le nombre donné; admettons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ que l'on peut toujours supposer irréductible donne

$$\frac{a^3}{b^3} = N$$

Mais lorsque (nº 156) deux nombres a et b sont premiers, leurs puissances le sont aussi; donc $\frac{a^3}{b^3}$ est une fraction irréductible, ce qui rend impossible l'égalité entre un nombre entier et un nombre fractionnaire.

On en conclut que $\sqrt[3]{N}$ n'est ni entier ni fractionnaire, et que cette racine est un nombre *incommensurable ou irrationnel.*

410. Dans ce cas on doit attacher à $\sqrt[3]{N}$ un tout autre sens que celui d'*un nombre pris trois fois comme facteur : lorsque N n'est pas un cube on dit que la racine cubique de ce nombre est la racine du plus grand cube entier contenu dans* N.

Ainsi 7 est la racine cubique de 483, parceque 7^3 ou 343 est le plus grand cube inférieur à 483; seulement cette racine de signification conventionnelle pour ainsi dire, est exprimée en unités simples, tandis qu'on pourrait la désirer en fonction d'une unité décimale quelconque, ou même d'une fraction quelconque. Nous reviendrons avec détails sur ce point.

Nous ne recevons pas non plus la dénomination générale de *cube parfait* pour un motif analogue à celui qui nous a porté à exclure celle de *carré parfait.*



411. Théorème xx. *Le cube de la somme de deux nombres se compose du cube du premier, plus le triple produit du second par le carré du premier, plus le triple produit du premier par le carré du second, plus le cube du second.*

Démonstration. Soit $a + b$ la somme proposée, pour laquelle (n° 376), on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Multipliant de part et d'autre par $a+b$, selon la règle (n° 63) il viendra :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

412. Corollaire i. *Le cube de la somme de deux nombres se compose de la somme des cubes de ces nombres, plus trois fois leur produit multiplié par leur somme.*

En effet l'égalité précédente peut prendre la forme

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

412. Corollaire ii. *La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs se compose du triple carré du plus petit, plus trois fois ce petit, plus 1.*

Il suffit dans la formule du cube de $a+b$, donnée (n° 411) de faire $b = 1$.

414. Corollaire iii. *Le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités est égal au cube des dizaines, plus trois fois le produit des unités par le carré des dizaines, plus trois fois le produit des dizaines par le carré des unités, plus le cube des unités.*

On représentera pour cela par a le nombre de dizaines et par b le nombre d'unités.



REMARQUE. *Le chiffre des unités du cube d'un nombre est le même que celui du cube du chiffre des unités de ce nombre ;* car dans le développement cubique du (n° 409), le terme b^3 est le seul qui exprime des unités.

415. THÉORÈME XXI. *Le cube d'un produit est égal au produit des cubes de ses facteurs.*

Démonstration. Soit le produit

$$P = a\, b\, c\, d \ldots p\, q.$$

Nous savons (n° 379), que

$$P^2 = a^2\, b^2\, c^2\, d^2 \ldots p^2\, q^2$$

Le produit, membre à membre, de ces deux égalités fournit

$$P^3 = a^3\, b^3\, c^3\, d^3 \ldots p^3\, q^3 \qquad (c.q.f.d.)$$

L'élévation au cube a donc pour résultat de tripler l'exposant de chaque facteur.

On déduit aussi de cette dernière relation que : *la racine cubique d'un produit est égale au produit des racines cubiques des facteurs.*

Les exposants des divers facteurs seront donc divisés par 3.

416. THÉORÈME XXII. *Le plus grand cube contenu dans un nombre* a *est celui dont la différence à ce nombre est moindre que le triple du carré de sa racine cubique, augmenté de 1 et du triple de cette même racine.*

Démonstration. On a, par condition de question, en désignant par b^3 ce plus grand cube supposé :

$$a - b^3 < 3b^2 + 3b + 1$$

D'où en ajoutant b^3 de part et d'autre

$$a < b^3 + 3b^2 + 3b + 1$$

ou

$$a < (b+1)^3$$

Ainsi donc par ordre de grandeur, on a :

$$b^3 < a < (b+1)^3 \qquad (c.q.f.d.)$$

417. Lorsqu'un cube est plus petit que 1000, les deux suites (n° 409) donnent immédiatement le plus grand cube qu'il contient ; mais si le nombre est plus grand que 1000, et lorsque sa racine a par conséquent au moins *deux* chiffres, on comprend que dans l'impossibilité de prolonger indéfiniment ces suites, on soit obligé de recourir à une autre méthode qui repose sur le théorème suivant :

Théorème XXIII. *Le nombre de dizaines que renferme la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre entier donné, est égal à la racine cubique du plus grand cube contenu dans le résultat que l'on obtient en supprimant dans le nombre donné le premier groupe.*

Démonstration. Soit le nombre

$$N = p \dots g\,f\,e\,d\,c\,b\,a$$

Ce nombre ayant plus de trois chiffres, la racine cubique, qui en a ainsi plus de deux, renferme donc des dizaines dont le nombre est la racine du plus grand cube contenu dans

$$N' = p \dots g\,f\,e\,d$$

Tel est le point à établir. — Pour cela si R représente la racine du plus grand cube que contient N', on a :

$$R^3 < N' < (R + 1)^3 \ldots\ldots \qquad (1)$$

Multiplions par 1000 ou par 10^3,

$$R^3.10^3 < p\ldots. g f e d 0 0 0 < (R+1)^3.10^3\ldots. \quad (2)$$

Prouvons que sans troubler l'égalité (2) *on peut y remplacer* les trois zéros qui se trouvent à la droite de N' par le premier groupe *c b a*.

Entre le nombre entier N' et $(R + 1)^3$ de l'expression (1) il y a *au moins* UNE *unité de différence;* donc, en passant à (2), cette différence rendue 1000 fois plus grande permettra d'ajouter au plus petit nombre *p a..... g f e d* 0 0 0 un nombre moindre que le minimum 1000 de différence ; et l'on aura encore

$$R^3.10^3 < N < (R + 1)^3.10^3$$

Et en retournant aux racines cubiques on obtient :

$$R.10 < \sqrt[3]{N} < (R + 1)10 \qquad (c.q.f.d.)$$

418. Problème. *Extraire la racine cubique du nombre*

$$N = \ldots. l\, k\, g\, f\, e\, d\, c\, b\, a.$$

Puisque N a plus de trois chiffres, $\sqrt[3]{N}$ a des dizaines que nous obtiendrons en cherchant la racine du nombre

$$N' = \ldots. l\, k\, g\, f\, e\, d.$$

que l'on forme en supprimant dans N la première tranche de trois chiffres $c\,b\,a$; généralement N' ayant aussi plus de deux chiffres $\sqrt[3]{N'}$ en aura plus d'un, et pour déterminer les dizaines de cette nouvelle racine, on devra chercher le plus grand cube contenu dans

$$N'' = \ldots . l\,k\,g$$

En continuant à raisonner de la sorte, *on est amené à partager de droite à gauche. le nombre N en tranches de trois chiffres*, et à rechercher enfin la racine du plus grand cube que contient le dernier groupe *complet* ou *incomplet*, c'est-à-dire ayant *trois deux* ou *un* chiffres.

Cette dernière racine sera la caractéristique d'ordre le plus élevé de $\sqrt[3]{N}$: en effet nous venons de prouver que

1° $\sqrt[3]{N'}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt[3]{N}$.

2° $\sqrt[3]{N''}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt[3]{N'}$, ou le nombre de centaines de $\sqrt[3]{N}$.

3° $\sqrt[3]{N'''}$ est le nombre de dizaines de $\sqrt[3]{N''}$, ou le nombre de mille de $\sqrt[3]{N}$ et ainsi de suite.

En général, on voit donc que

Le nombre d'unités d'un ordre (i) *assigné de la racine cubique d'un nombre donné est égal à la racine du plus grand cube contenu dans le nombre que l'on obtient en supprimant sur la droite du nombre les* i—1 *premiers groupes, ou tranches de trois chiffres.*

Soient de gauche à droite

$$t\ ,\ t'\ ,\ t''\ , \ldots .\ T.$$

les différents groupes du nombre N Représentons par A la racine cubique du plus grand cube renfermé dans *t;* A est le chiffre de gauche de la racine et sera le chiffre des dizaines

de la racine du plus grand cube contenu dans tt', c'est-à-dire dans le nombre formé par l'ensemble des deux premiers groupes de gauche.

De tt' si nous retranchons le cube A^3 le reste $t—A^3$ que nous désignerons par α, devra, pour être convenable, satisfaire à la condition :

$$\alpha < 3A^2 + 3A + 1$$

A la droite de α abaissant la tranche t', on dira que du nombre tt' on a soustrait le cube A^3 des dizaines de $\sqrt[3]{tt'}$ et que le reste $\alpha t'$, que l'on obtient, contient encore entr'autres parties (n° 412), en appelant B le chiffre d'unités de $\sqrt[3]{tt'}$:

$$3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$3A^2B$ exprimant des centaines ne peut évidemment se trouver que dans ce qu'il reste vers la gauche de $\alpha t'$, lorsqu'on en supprime les deux premiers chiffres de droite. Le résultat R_1 de cette suppression contiendra entr'autres choses le triple produit du carré des dizaines (A) par les unités (B) de $\sqrt[3]{tt'}$

A titre d'essai, divisons R_1 par $3A^2$ le quotient B sera égal ou supérieur au deuxième chiffre de $\sqrt[3]{N}$; si B est trop fort le cube de AB sera plus grand que tt', et l'on diminuera successivement ce chiffre d'assez d'unités pour obtenir le plus grand cube contenu dans tt'.

Retranchons $(AB)^3$ de tt'; et soit α' le reste; il faudra que, A' représentant pour abréger le nombre A B ou $10A+B$,

$$\alpha' < 3A'^2 + 3A' + 1$$

A la droite de α' abaissant la tranche t', et désignant par C le troisième chiffre de $\sqrt[3]{N}$, on aura en vertu du (n° 412) :

$$\alpha' t'' \overline{\gtrless} 3 A'^2 C + 3 A' C^2 + C^3$$

En raisonnant comme pour le chiffre B, on déterminera le chiffre C en essayant par division le quotient par $3 A'^2$ du résultat R_2 obtenu en supprimant à la droite de $\alpha' t''$ les deux premiers chiffres. Enfin l'on obtiendra d'une manière analogue les différents chiffres de $\sqrt[3]{N}$.

419. Il est utile de remarquer que chaque vérification, qui consiste dans l'élévation au cube de la partie supposée exacte de la racine, fournit un élément de recherche pour le chiffre suivant; de plus l'*un quelconque des restes obtenus après essais et vérification, ne peut jamais surpasser le triple de la somme de la racine à vérifier et de son carré.*

420. Le procédé d'extraction qui précède prouve que :

Le nombre de chiffres de la racine cubique est égal à celui des groupes du nombre proposé.

Ce point s'établirait en suivant le mode de démonstration employé (n° 384).

421. La racine déterminée, comme nous venons de l'indiquer, est telle que si on l'augmente de 1, son cube est supérieur au nombre donné; c'est ce qui a fait dire que *cette racine cubique est obtenue à moins d'une unité près.*

On peut donc formuler cette règle :

Pour extraire la racine cubique, à moins d'une unité près, d'un nombre entier on y accuse les groupes; on extrait la racine du plus grand cube contenu dans le premier groupe de

gauche, et l'on a ainsi le premier chiffre de la racine, dont le cube est ensuite retranché de ce même groupe; à la droite du reste on abaisse le chiffre des centaines du groupe voisin et l'on divise le nombre ainsi formé par le triple carré du premier chiffre de la racine; le quotient est considéré comme second chiffre, et pour le vérifier on élève au cube le nombre formé du premier chiffre déjà obtenu et du second supposé; si ce cube est plus petit, ou tout au plus égal au nombre que forment les deux groupes de gauche, le chiffre essayé est exact; s'il en est autrement on essaie de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait trouvé le chiffre exact.

A la droite du reste que l'on obtient après la soustraction du cube formé par les deux chiffres déterminés et vérifiés, on écrit le chiffre des centaines du 3e groupe; on divise le nombre ainsi construit par le triple carré du nombre exprimé par les deux chiffres déjà connus de la racine. Le quotient entier de cette division est égal ou supérieur au troisième chiffre de la racine; à titre d'essai le cube du nombre qui se compose des deux premiers chiffres acquis et de ce troisième supposé, sera soustrait de l'ensemble des trois premiers groupes; le chiffre essayé ne sera convenable que si cette soustraction est possible. — On continue de la sorte jusqu'à ce que toutes les tranches aient été employées. L'excès du nombre proposé sur le cube de la racine trouvée est le RESTE *de l'extraction. Si ce reste est* NUL, *le nombre proposé est un* CUBE; *s'il n'en est pas ainsi, on a la racine par défaut à moins d'une unité près.*

Voici le dispositif des opérations de l'extraction de la racine cubique d'un nombre entier

45.520.662	357		
27	$3.3^2 = 27$		$3.35^2 = 3675$
18 5	36	35	357
42 875	36	35	357
2 645 6	216	175	2499
45 499 293	108	105	1785
Reste 21 369	1296	1225	1071
	36	35	127449
	7776	6125	357
	3888	3675	892143
	46656	42875	637245
			382547
			45499293

422. Après avoir obtenu le second chiffre 5 de la racine par une division, on peut vérifier ce chiffre de la manière suivante :

On forme 3 fois la racine, ce qui donne 9; on écrit 5 à la droite ce qui donne 95 et l'on multiplie par 5; on a ainsi formé

$$475 = 3ab + b^2$$

en représentant par a le chiffre 3 et par b le chiffre 5 à vérifier. On écrit 475 au dessous de 2700 et l'on fait la somme ce qui donne

$$3175 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

Multipliant ce nombre par 5 on obtient

$$15875 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

qui est inférieur au nombre 18520 duquel on le soustrait. — Pour le troisième chiffre 7 de la racine, on formera $3.\overline{35}^2$. Ce produit s'obtient en écrivant 5^2 ou 25 au dessous de 475 et 3175, ce qui donne

$$\begin{aligned} 475 &= \phantom{3a^2+{}} 3ab+b^2 \\ 3175 &= 3a^2+3ab+b^2 \\ 25 &= \phantom{3a^2+3ab+{}} b^2 \\ \hline 3675 &= 3a^2+6ab+3b^2 \end{aligned}$$

Or le second membre étant le triple du carré de $(a+b)$. on aura

$$3675 = 3.\overline{35}^2$$

Après avoir déterminé à l'aide de la division de 26456 par 3675 le 3e chiffre 7, on opère en triplant la partie 35, ce qui donne 105; on écrit le 7 supposé à la droite de 105, et l'on obtient 1057 que l'on multiplie par 7 ce qui donne 7399 que l'on ajoute à 367500 pour obtenir 374899; enfin on multiplie ce dernier nombre par 7 et l'on en soustrait le produit de 2645662. — Voici le dispositif de cette abréviation, remarquable par son élégante simplicité,

45520662	357	
27	$3.3^2 = 27\cdot\cdot$	95
18520	475	5
15875	3175.5	475
2645662	25	
2624293	$3\cdot\overline{35} = 3675\cdot\cdot$	1057
21369	7399	7
	374899.7	7399
	49	
	382347	

Cette manière d'opérer a l'avantage, tout en abrégeant les calculs, de conserver le dispositif *continu* des opérations d'une division.

423. Quand on a trouvé un ou plusieurs chiffres de la racine cubique d'un nombre entier et que l'on cherche à déterminer le chiffre suivant, on effectue une division dont le quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort. Proposons nous ce

PROBLÈME. *Quel est le* MAXIMUM *de l'excès d'un quotient d'*ESSAI *sur le véritable chiffre correspondant de la racine.*

Désignons par a la partie déjà trouvée de la racine et par b le chiffre nouveau.

Soit N le nombre formé par toutes les tranches déjà employées, y compris celle nécessaire à la détermination de b.

a est donc le nombre de dizaines et b le nombre d'unités de $\sqrt[3]{N}$; c'est à-dire que, à moins d'une unité près, l'on a

$$\sqrt[3]{N} = a \,.\, 10 + b.$$

Le reste R à la droite duquel est écrite la dernière tranche de N est donc

$$R = N - a^3 \,.\, 1000$$

Remarquons que tous les nombres entiers compris entre

$$(a \cdot 10 + b)^3 \quad \text{et} \quad [a \,.\, 10 + (b+1)]^3 - 1$$

ont, *à moins d'une unité près*, la même racine cubique $a \cdot 10 + b$; en effet si l'on retranche ces limites l'une de l'autre, on aura :

$$(a \cdot 10 + b + 1)^3 - 1 - (a \cdot 10 + b)^3 = 3(a \cdot 10 + b)^2 + 3(a \,.\, 10 + b)$$

Et comme il a été établi (n° 414) que *le plus grand cube contenu dans un nombre est celui dont la différence à ce nombre est moindre que le triple du carré de sa racine cubique, augmenté de 1 et du triple de cette même racine*, il est clair que la plus grande valeur possible de N est

$$(a\cdot 10+b+1)^3-1=a^3.1000+3a^2\cdot 100(b+1)+3\,a.10(b+1)^2$$
$$+\,(b+1)^3-1$$

La plus grande valeur du dividende, en y comprenant la tranche abaissée, est donc

$$D=3a^2\cdot 100(b+1)+3a\cdot 10(b+1)^2+(b+1)^3-1$$

Comme 999 est évidemment le maximum de $(b+1)^3-1$, et que $3\,a\cdot 10\,(9+1)^2$ est celui de $3\,a\cdot 10\,(b+1)^2$, en représentant par k le nombre de centaines de D, on aura toujours.

$$k \overline{\lessdot}\, 3\,a^2\,(b+1)+3\,a\cdot 10+9$$

En effectuant, selon la règle d'extraction, la division de k par $3\,a^2$, il viendra :

$$\frac{k}{3a^2} \overline{\lessdot}\, b+1+\frac{10}{a}+\frac{3}{a^2}$$

Posons

$$\frac{k}{3a^2}=\text{L}$$

Et nous aurons

$$\text{L}-b \overline{\lessdot}\, 1+\frac{10}{a}+\frac{3}{a^2}$$

Le second membre de cette expression donne pour chaque chiffre une limite supérieure du nombre d'essais infructueux que l'on peut avoir à faire pour déterminer un chiffre de la racine.

Lorsque a n'a qu'un chiffre la valeur maximum de $L - b$ correspond à $a = 1$; on a alors

$$\text{maximum de } L - b = 9 + 1 + 1 + 3 = 14.$$

A priori, cette limite est *beaucoup* trop forte puisqu'elle ne doit dans aucun cas dépasser 8.

L'expression précédente peut prendre la forme

$$L - b \overline{\gtrless} 1 + \frac{10a + 3}{a^2}$$

Et si nous faisons,

$$a = 10 + p.$$

p étant un nombre entier, il viendra

$$\frac{10a + 3}{a^2} = \frac{10(10+p) + 3}{(10+p)^2} = \frac{100 + 10p + 3}{100 + 20p + p^2}$$

Dans le second membre de cette relation si l'on pose $p=0$ on aura

$$\frac{10a + 3}{a^2} < 2, \text{ d'où } L - b \overline{\gtrless} 2.$$

Concevons que l'on donne à p des valeurs entières croissantes ; remarquons que pour $p=1$, on a

$$\frac{10a + 3}{a^2} = \frac{100+10+3}{100+20+1} = \frac{113}{121}$$

Donc on a encore $L-b \overline{\overline{<}} 2$; d'ailleurs à partir de $p=1$ et à mesure que p croît la quantité $20p+p^2$ croissant bien plus *rapidement* que $10p+3$, la fraction $\frac{10a+3}{a^2}$ diminuera toujours de plus en plus ; donc à partir de $a=10$ et de $p=0$ la valeur de $L-b$ est bien un minimum, et puisque ce minimum est 1, il est évident que nous n'avons pas à le considérer pour a compris entre 1 et 10.

On peut donc énoncer que :

Théorème xxiv. *L'erreur possible commise par division, dans l'extraction d'une racine cubique, est 1 lorsque la partie déjà connue est au moins égale à 10 ; et c'est ce qui a nécessairement lieu à partir du troisième chiffre de la racine.*

424. Conformément à la formule générale nous avons trouvé que 14 *serait* le maximum de l'erreur possible ; mais cette limite est beaucoup trop grande, et c'est ce dont on s'assure en calculant directement les valeurs de $L-b$ pour les *cinq* premières valeurs 1, 2, 3. 4, 5 de b.

Pour cela divisons par $300a$ la valeur de D' trouvée (n° 420) et l'on obtient :

$$\alpha \overline{\overline{<}} b+1+\frac{(b+1)^2}{10a}+\frac{(b+1)^3-1}{300a^2}$$

qui pour $a=1$, donne

$$\alpha'-b \overline{\overline{<}} 1+\frac{(b+1)^2(b+31)-1}{300}$$

On aura donc concurremment :

Pour $b=0$, 1, 2, 3, 4, 5,

$\alpha'-b \overline{\overline{>}} 1$, 1, 1, 2, 3, 5,

Mais pour $b=5$, si l'on admettait $\alpha'—b=5'$, on aurait à exclure le *chiffre* 10, ce qui réduit ce maximum d'erreur à 4.

Quant à $b=6, 7, 8, 9$ le calcul est inutile puisque l'erreur ne peut jamais atteindre 4. On dira donc :

Théorème xxv. *Le nombre 3 est le maximum du nombre d'essais infructueux que l'on peut devoir faire dans la détermination par division d'un chiffre quelconque de la racine cubique*

425. *Achèvement par division de l'extraction de la racine cubique.*

Lorsque l'on a déterminé *la moitié plus un* du nombre de chiffres de la racine, on peut par une simple division dont les éléments sont fournis par l'extraction, obtenir la dernière partie de la racine.

En effet soit a la partie connue, et b celle qu'il faut encore trouver.

Supposons que la racine R ait un nombre impair de chiffres, représenté par $2n+1$; que a ait $n+1$ et b, n chiffres.

Le nombre N fournit dès lors la relation

$$N=(a.10^{n}+b)^{3}=a^{3}.10^{3n}+3a^{2}b.10^{2n}+3ab^{2}.10^{n}+b^{3}$$

D'où

$$Q=\frac{N-a^{3}.10^{3n}}{3a^{2}.10^{2n}}=b+\frac{b^{2}}{a.10^{n}}+\frac{b^{3}}{3a^{2}.10^{-n}}\cdots \quad (1)$$

a et b ayant respectivement n et $n+1$ chiffres satisfont aux inégalités

$$\left.\begin{array}{l} b^{2}<10^{2n} \\ a \overline{>} 10^{n} \end{array}\right\} \cdots \quad 2$$



Sous l'empire des relations (2) cherchons le maximum de l'excès du quotient Q sur b; il est clair que ce maximum ne pourra être supérieur à la valeur que prennent les deux derniers termes du second membre de (1) lorsqu'on donne simultanément au dénominateur la plus petite valeur et au numérateur, la plus grande ; on aura donc,

$$Q-b \overline{\gtrless} \left(\frac{10^n-1}{10^n}\right) + \frac{1}{3.10^n}\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)^3$$

Mais évidemment

$$(10^n-1)^2 < 10^{2n}-10^n$$

$$(10^n-1)^3 < 10^{3n}$$

Donc

$$Q-b < 1-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{3.10^n}$$

Et enfin

$$Q-b < 1$$

D'où l'on a ce :

THÉORÈME XXVI. *La première moitié plus un du nombre de chiffres d'une racine cubique étant trouvée, l'autre partie de cette racine est le quotient du reste auquel on est arrivé par le triple carré de la partie obtenue.*

CARACTÈRES D'IRRATIONNALITÉ.

426. Lorsqu'un nombre est un cube, on reconnaît et l'on démontre que certaines conditions sont satisfaites, et que dans le cas contraire ces mêmes conditions ne le sont pas.

Ces propriétés constituent les caractères d'irrationnalité cubique.

427. Théorème xxvii. *Un nombre donné divisible par un nombre premier α, ne peut être un cube, s'il n'est divisible par α^3.*

Démonstration. Soit N un cube ayant le nombre premier α pour diviseur et dont R est la racine cubique; d'où

$$N = R.R.R.$$

Or α divisant N doit diviser le second membre; d'où l'on déduit, p étant un nombre entier convenable, que

$$R = p\,\alpha$$

Donc

$$N = p^3\,\alpha^3$$

428. Corollaire i. *Un nombre pair ne peut être un cube, s'il n'est divisible par 8.*

429. Corollaire ii. *Un nombre entier ne peut être un cube si, les premiers chiffres de droite étant nuls, le nombre de ces zéros n'est pas multiple de 3.*

Un nombre N ayant q zéros à sa droite (q étant un nombre entier) est divisible par 10^q ou par $2^q.5^q$; donc en vertu du théorème (n° 427) N doit être divisible par $2^{3q}.5^{3q}$ ou par $8^q.125^q$, ou enfin par 1000^q; si le nombre N est donc un cube, ses q premiers groupes de droite seront nuls.

430. Théorème xxviii. *Un nombre entier pair, qui n'est divisible que par 8, ne peut être un cube si le chiffre des unités étant 2 ou 6, celui des dizaines est* pair.

1° Soit N le nombre proposé; comme il est multiple de 2, on a (n° 427) :

$$N = 8p$$

p est nécessairement un nombre *impair*, car sans cela N serait divisible une seconde fois par 8; de plus le chiffre de droite de p doit être 9 puisque son chiffre était 1, 3, 5 ou 7 le produit $8\,p$ n'aurait pas 2 pour chiffre d'unités.

a étant donc le nombre de dizaines de p on aura :

$$N = (a.10+9)\,8 = 8\,a\cdot10+72 = (8a+7)\,10+2$$

Or $8\,a+7$ est un nombre impair, donc le chiffre de dizaines de N est impair si N est un cube.

2° *Si* 6 *est le chiffre des unités de* N, le nombre donné divisible par 2, donne encore (q étant un nombre entier *impair*)

$$N = 8\,q$$

q ne peut avoir que 7 pour chiffre de droite, car l'un des chiffres 1, 3, 5 ou 9 ne donnerait pas 6 pour chiffre d'unités à N; a étant un nombre entier on aura donc :

$$N = (a\,10+7)\,8 = 8\,a.10+56 = (8\,a+5)\,10+6$$

Mais $8\,a+5$ est impair, donc le chiffre des dizaines de N est impair si N est un cube.

431. Théorème xxix. *Un nombre entier pair et dont le chiffre des unités est* 4 *ou* 8, *ne peut-être un cube si le chiffre des dizaines est* impair.

Démonstration. Supposons encore que le nombre donné N n'admette qu'une seule fois le facteur 8, et que k étant un nombre entier, l'on ait

$$N = 8\,k$$

1° *Si le chiffre d'unité est* 4, 3 est celui de k, à l'exclusion de 1, 5, 7 ou 9 dont le produit par 8 n'aurait pas 4 pour premier chiffre. Ainsi b étant entier, le nombre proposé se décompose en

$$N = 8\,(b.10+3) = 8\,b.10+24 = (8\,b+2)\,10+4.$$

Or $8\,b+2$ est impair, donc le chiffre des dizaines de N sera pair si N est un cube.

2° *Si le chiffre d'unité est* 8, le seul chiffre 1 pourra être celui des unités de N; et d étant un nombre entier il viendra

$$N = 8\,(d.10+1) = 8\,d.10+8$$

D'où l'on voit que si N est un cube, son chiffre de dizaines est pair.

432. Théorème xxx. *Un nombre impair n'est pas un cube si diminué ou augmenté de 1 ou de 27 il n'est pas divisible par* 8.

Démonstration. Tout nombre impair (n° 177) appartient à l'une des formes

$$8\,x \pm 1 \quad , \quad 8\,x \pm 3$$

dans lesquelles x est un nombre entier quelconque. En élevant au cube on obtient,

$$(8x \pm 1)^3 = 8^3 x^3 \pm 3.8^2\,x^2 + 3.8\,x \pm 1 = \dot{8} \pm 1$$

$$(8\,x \pm 3)^3 = 8^3\,x^3 \pm 3.8^2.3\,x^2 + 3.8.3^2 x \pm 27 = \dot{8} \pm 27$$

Ces formules démontrent la proposition.

433. Théorème xxxi. *Un nombre entier, dont* 5 *est le chiffre d'unités, ne peut être un cube si son premier groupe n'est*

125 , 375 , 625 , 875.

Démonstration. D'après la remarque du (n° 414), 5 est aussi le chiffre de droite de la racine du nombre N, et en désignant par k le nombre de dizaines de cette racine, il viendra :

$$N = (10k)^3 + 3.5\,(10k)^2 + 3.5^2.10k + 5^3$$

ou

$$N = 1000k^3 + 1500k^2 + 750k + 125$$

Comme le terme $1000k^3$ est sans influence sur la valeur de la première tranche de trois chiffres, considérons la somme S des deuxième et troisième termes du second membre de l'égalité précédente,

$$S = 1500k^2 + 750k = 750k\,(2k+1)$$

1° Si k est pair et de la forme $2n$, on aura

$$S = 750.2n\,(4n+1) = 6000.n^2 + 1500.n$$

Donc S aura pour premier groupe 000 ou 500 selon que n sera pair ou impair, c'est-à-dire *selon que* k *sera ou ne sera pas multiple de* 4.

La première tranche de N sera alors 125 ou 625.

2° Si k est impair, le produit $k\ (2k+1)$ le sera aussi, d'où l'on voit que, p étant un nombre entier, on a

$$S = 750\ (2p+1) = 1500p + 750$$

Et selon que p sera pair ou impair, le premier groupe de S sera 750 ou 250; par suite la première tranche de trois chiffres de N sera 875 ou 375. (*c.q.f.d.*)

434. *Observation générale.* Soit N un nombre fractionnaire, N′ la partie entière de ce nombre et R^3 le plus grand cube contenu dans N′; on a la relation

$$R^3 < N' < (R+1)^3$$

Entre les nombres *entiers* N′ et $(R+1)^3$ il y a au moins 1 de différence, donc on pourra augmenter le nombre intermé-

diaire N' d'une quantité moindre que 1, sans que l'inégalité cesse d'exister; et c'est ce qui donnera

$$R^3 < N < (R+1)^3$$

On peut donc dire que :

La racine cubique à moins d'une unité près, d'un nombre entier ou fractionnaire, est la racine du plus grand cube entier contenu dans ce nombre ou dans la partie entière de ce nombre.

On est convenu de dire que R est la racine *par défaut* à moins d'une unité, et que R+1 est la racine *par excès* à moins d'une unité.

—

DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE D'UNE FRACTION.

435. Pour a et b quelconques, on a toujours

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

D'où

THÉORÈME XXXII. *Le cube d'une fraction s'obtient en élevant au cube son numérateur et son dénominateur.*

THÉORÈME XXXIII. *La racine cubique d'une fraction s'obtient en extrayant celle du numérateur et celle du dénominateur.*

436. THÉORÈME XXXIV. *Pour qu'une fraction irréductible soit un cube, il faut et il suffit que ses deux termes soient des cubes.*

Démonstration. Supposons qu'une fraction irréductible $\frac{A}{B}$ puisse être le cube d'une autre fraction que l'on peut toujours aussi admettre irréductible; on doit donc avoir

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$$

$\frac{a^3}{b^3}$ est aussi irréductible ; or (n° 199) deux fractions irréductibles égales sont identiques, donc on a, comme *condition nécessaire*

$$A = a^3, \textit{ et } B = b^3$$

Réciproquement si ces dernières conditions sont satisfaites, on en déduit par division

$$\frac{A}{B} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

C'est-à-dire que $\frac{A}{B}$ est alors un cube et que la *condition* est *suffisante*.

437. Théorème xxxv. *Une fraction est un cube lorsque le produit du numérateur par le carré du dénominateur est un cube.*

Démonstration. Admettons que $\frac{A}{B}$ soit le cube d'une fraction $\frac{x}{y}$, ou

$$\frac{A}{B} = \frac{x^3}{y^3}$$

D'où en multipliant par B^3 les deux membres de cette égalité,

$$AB^2 = \frac{B^3 x^3}{y^3} = \left(\frac{B x}{y}\right)^3$$

AB^2 est donc un cube toutes les fois que $\frac{B x}{y}$ est un nombre entier. Cette condition *nécessaire*, est aussi *suffisante* ; car réciproquement supposons que l'on ait

$$A B^2 = C^3$$

En divisant par B les deux membres de cette égalité, on obtiendra :



$$\frac{A}{B} = \frac{C^3}{B^3} = \left(\frac{C}{B}\right)$$

Et l'on voit que $\frac{A}{B}$ est le cube d'une fraction $\frac{C}{B}$; la condition est donc *suffisante.*

438. Le cube d'une fraction ou d'un nombre fractionnaire ne peut (n° 407) être un nombre entier ; donc si une fraction n'est pas le cube d'une autre fraction, sa racine est irrationnelle.

439. Du théorème XXXIII (n° 435), il résulte que :

Pour extraire la racine cubique d'une fraction on extrait les racines cubiques du numérateur et du dénominateur ; si ces termes sont des cubes le quotient de la première racine par la seconde, est la racine de la fraction proposée.

Exemple : Soit la fraction $\frac{216}{2198}$; on remarque que

$$216 = \overline{6}^3,\ 2197 = \overline{13}^3$$

Donc

$$\sqrt[3]{\frac{216}{2197}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{2197}} = \frac{6}{13}$$

440. Quand le dénominateur n'est pas un cube, on pourra indiquer la racine de chacun des termes de la fraction ; ainsi

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}}$$

Mais le dénominateur $\sqrt[3]{7}$ étant irrationnel il devient indispensable de transformer la fraction proposée : cette transformation a pour but d'obtenir un cube pour nouveau dénominateur.

A cet effet, soit en général la fraction irréductible

$$\frac{A}{B}=\frac{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}}{p^{3\delta}q^{3\varepsilon+1}r^{3\pi+2}s^{3\theta}t^{3\rho+1}}$$

Nous savons qu'un nombre B, décomposé en facteurs premiers p, q, r, s, t, est un cube quand (nº 415), ces facteurs ont pour exposants des multiples de 3 : comme ici les exposants $3\varepsilon+1$, $3\pi+2$, $3\rho+1$ ne sont pas divisibles par 3, il suffira évidemment de multiplier les deux termes de fraction par $q^2\,r\,t^2$ pour que le nouveau dénominateur soit un cube.

On aura ainsi

$$\frac{A}{B}=\frac{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}q^{2}r\,t^{2}}{p^{3\delta}q^{3(\varepsilon+1)}r^{3(\pi+1)}s^{3\theta}t^{3(\rho+1)}}$$

et par suite

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[3]{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}q^{2}r\,t^{2}}}{p^{\delta}q^{\varepsilon+1}r^{\pi+1}s^{\theta}t^{\rho+1}}$$

Lorsque le dénominateur B est un nombre *premier* cette transformation se réduit à multiplier les deux termes par le carré du dénominateur, ce qui donne

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\sqrt[3]{\frac{A\,B^{2}}{A^{3}}}=\frac{1}{B}\sqrt[3]{A\,B}$$

On aurait ainsi :

1º Pour la racine de $\frac{5}{7}$,

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt[3]{5.49}}{7}=\frac{1}{7}\sqrt{245}$$

2° Pour la racine de $\frac{3240}{1288651}$, la décomposition en facteurs premiers fournit

$$3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$
$$1288651 = 7^3 . 13 \cdot 17^2$$

Il faudra donc multiplier les deux termes de la fraction donnée par $13^2.17$, ce qui fournira

$$\sqrt[3]{\frac{3240}{1288651}} = \frac{\sqrt[3]{3240 \cdot 169 \cdot 17}}{7.13.17} = \frac{1}{1549}\sqrt[3]{6003720}$$

Nous avons donc cette règle :

Pour extraire la racine cubique d'une fraction que l'on a d'abord, s'il y a lieu rendue irréductible, décomposez le dénominateur en ses facteurs premiers ; si les exposants de tous ces facteurs ne sont pas divisibles par 3, on multiplie le numérateur par le produit des facteurs du dénominateur dont les degrés ne sont pas des multiples de 3, on donne pour exposant à chacun des facteurs introduits l'excès de 3 sur l'exposant possédé au dénominateur. On extrait ensuite, à moins d'une unité, la racine du produit ainsi fourni par le numérateur, puis on divise cette racine par le produit des facteurs premiers du dénominateur, affectés d'exposants trois fois moindres que leurs exposants primitifs rendus multiples de 3.

Dans l'exemple choisi, on peut simplifier le calcul de la racine cubique du numérateur, en isolant les cubes qui s'y trouvent :

$$\sqrt[3]{\frac{3240}{1288651}} = \frac{\sqrt{2^3.3^4.5 \times 169\ 17}}{7 \cdot 13.17} = \frac{\sqrt{2^3.3^3 \times 3.5.169.17}}{7 \cdot 13 \cdot 17}$$

D'où

$$\sqrt[3]{\frac{3240}{1288651}} = \frac{6}{1547}\sqrt{27795}$$

Pour extraire la racine cubique d'un nombre fractionnaire, il faut transformer l'expression en fraction à deux termes, puis opérer comme on vient de le dire.

441. Occupons-nous maintenant des fractions décimales, et remarquons que le cube de l'unité précédée d'un nombre n de zéros, est égal à 1 précédé de $3n$ zéros.

Considérons l'expression décimale

$$N, a b c d e f g h$$

En partageant la partie décimale, à partir de la virgule et de la gauche vers la droite en tranches de trois chiffres, puis complétant par *un* ou *deux* zéros la dernière tranche, qui pourrait être incomplète, il viendra :

$$N, a b c d e f g h o o = \frac{1}{1000000000} N a b c d e f g h o o$$

D'où

$$\sqrt[3]{N, a b c d e f g h} = \frac{1}{1000} \sqrt[3]{N a b c d e f g h o o}$$

Donc en règle :

Pour extraire la racine cubique d'une expression décimale, faites en sorte, par des zéros complétifs s'il y a lieu, que le nombre des chiffres décimaux soit un multiple de 3; extrayez ensuite la racine en faisant abstraction de la virgule et sur la droite du nombre entier ainsi obtenu mettez une virgule au rang marqué par le nombre de tranches décimales de trois chiffres (complètes ou incomplètes) que contient le nombre proposé.

Exemple. Soit 5,5021677489

$$\sqrt[3]{5{,}5021677489} = \frac{1}{10000} \sqrt[3]{5502167748900}$$

442. *Extraire la racine d'indice* i *déterminé d'un nombre donné* N *quelconque, à moins d'une fraction* $\frac{1}{n}$ *près, c'est trouver deux multiples consécutifs* $\frac{x}{n}$ et $\frac{x+1}{n}$ *de cette fraction entre les puissances* i^{me} *desquels le nombre* N *soit contenu.*

Ainsi en général on doit avoir

$$\frac{x^i}{n^i} < N < \frac{(x+1)^i}{n^i}$$

On en déduit immédiatement :

$$x^i < N.n^i < (x+1)^i$$

Et la question proposée est ramenée à trouver la plus grande puissance i^{me} inférieure à $N.n^i$.

D'où ce

Théorème xxxvi. *La racine* i^{me}, *à moins d'une fraction* $\frac{1}{n}$ *près, d'un nombre quelconque* N *est exprimée par une fraction dont le dénominateur est le dénominateur d'approximation et dont le numérateur est la racine* i^{me} *de la plus grande puissance* i^{me} *que contient* $N.n^i$

443. Plus le dénominateur n d'approximation sera grand, plus les multiples $\frac{x}{n}$ et $\frac{x+1}{n}$ se rapprocheront, et par suite aussi plus la différence $\sqrt[i]{N} - \frac{x}{n}$ deviendra petite :

Si N n'est pas une puissance i^{me}, il est clair que jamais cette différence ne pourra devenir *nulle*, bien qu'elle tende indéfiniment vers zéro ; on voit donc que le nombre incommensurable $\sqrt[i]{N}$ peut-être remplacé par des nombres incommensurables ou irrationnels qui en diffèrent de moins en moins, et d'aussi peu qu'on le veut.

444. Le théorème XXXVI (n° 442) s'applique avec facilité et utilité aux racines carrées et aux racines cubiques.

1° Soit à trouver la racine carrée de $57\frac{13}{47}$ à moins de $\frac{1}{17}$ près. En désignant par R cette racine, et en observant qu'ici l'on a

$$N = 57\tfrac{13}{47}, \quad i = 2, \quad n = 17$$

Il viendra

$$R = \tfrac{1}{17}\sqrt{57\tfrac{13}{47} \cdot 17^2} = \tfrac{1}{17}\sqrt{16552\tfrac{44}{47}}$$

Il suffira maintenant de chercher la racine du plus grand carré contenu dans la partie entière 16552 sans radical, et l'on aura

$$R = \tfrac{128}{17} = 7\tfrac{8}{17}$$

2° Soit à trouver la racine cubique de $834\frac{2}{7}$ à moins de $\frac{1}{13}$ près.

On aura

$$N = 834\tfrac{2}{7}, \quad i = 3, \quad n = 13$$

Et

$$R = \tfrac{1}{13}\sqrt[3]{834\tfrac{2}{7} \cdot 13^3} = \tfrac{1}{13}\sqrt[3]{1832925\tfrac{5}{7}}$$

On a enfin

$$R = \tfrac{1}{13} \cdot 122 = 9\tfrac{5}{13}$$

445. Il arrive *très-souvent* que $n = 10^k$, c'est-à-dire que l'approximation est demandée avec k chiffres décimaux, ou à moins d'une unité décimale du k^{me} ordre.

Supposons par exemple qu'il s'agisse à moins de 0,0001 près, de trouver

1° La racine carrée de $57\frac{13}{47}$.

On transformera $\frac{13}{47}$ en fraction décimale et en calculant 8 chiffres décimaux, ou en général 2 fois plus de chiffres décimaux que l'on n'en désire à la racine demandée, on aura :

$$N = 57{,}27659574$$

Et

$$R = \frac{1}{10000}\sqrt[3]{57{,}28659570 \,.\, 10000^3} = \frac{1}{10000}\sqrt[3]{57276659574}$$

$$R = 7{,}5681$$

2° La racine cubique de 834 $\frac{2}{7}$ à moins de 0,001 près.

Traduisons $\frac{2}{7}$ en fraction décimale en calculant trois fois plus de chiffres décimaux que la racine n'en doit avoir.

$$N = 834{,}285714285$$

On aura

$$R = \frac{1}{1000}\sqrt[3]{834285714285} = 9{,}412$$

446. Lorsque nous avons parlé de l'extraction des racines carrées ou cubiques des fractions, nous avons dit que dans la plupart des cas on est forcé de faire subir à la fraction une transformation préalable dont le but est d'obtenir pour nouveau dénominateur un carré ou un cube.

Lorsque le dénominateur de la fraction donnée $\frac{A}{B}$ est *premier*, on a alors

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{B}\sqrt{AB}, \text{ à moins de } \frac{1}{B} \text{ près.}$$

et

$$\sqrt[3]{\frac{A^3}{B}} = \frac{1}{B}\sqrt[3]{AB^2}, \text{ à moins de } \frac{1}{B} \text{ près.}$$

Et lorsque le dénominateur donné n'est pas premier, comme aux (nos 405 et 446), on a

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} q r t}}{p^{\delta} q^{\varepsilon+1} r^{\pi+1} s^{\theta} t^{\rho+1}}, \text{ à moins de }$$

$$\frac{1}{p^{\delta} q^{\varepsilon+1} r^{\pi+1} s^{\theta} t^{\rho+1}} \text{ près.}$$

et

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} q^{2} r t^{2}}}{p^{\delta} q^{\varepsilon+1} r^{\pi+1} s^{\theta} t^{\rho+1}} \text{ , à moins de } \frac{1}{p^{\delta} q^{\varepsilon+1} r^{\pi+1} s^{\theta} t^{\rho+1}} \text{ près}$$

447. *Cas où le degré d'approximation n'est pas précisé.*

Parlons d'abord des racines carrées que l'on aurait extrait d'une manière approchée quelconque ; soit p une pareille racine de N, et x la fraction complémentaire que l'on devrait ajouter à p pour avoir

$$N = (p+x)^2 = p^2 + 2px + x^2$$

Comme x est petit, son carré est une quantité que *nous nous permettrons de négliger ;* nous aurons alors *approximativement*

$$N = p^2 + 2px, \text{ d'où } x = \frac{N - p^2}{2p}$$

Posons

$$\alpha = p + \frac{N - p^2}{2p}$$

α est donc la valeur nouvelle approchée de $\sqrt{N}$; or on peut l'écrire sous cette forme

$$\alpha = p + \frac{N}{2p} - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{N}{2p} = \frac{1}{2}\left(p + \frac{N}{p}\right)$$

D'où

THÉORÈME XXXVII. *Si* p *est une valeur approchée de* $\sqrt{N}$, $\frac{1}{2}\left(p + \frac{N}{p}\right)$ *est une valeur plus approchée de cette même racine.*

448. En conservant les mêmes notations, il viendra, s'il s'agit d'une racine cubique :

$$N = (p + x)^3 = p^3 + 3p^2 x + 3p x^2 + x^3$$

En négligeant x^2 et x^3 pour rapport à x, on aura approximativement

$$N = p^3 + 3p^2 x, \text{ d'où } x = \frac{N - p^3}{3p^2}$$

D'où

$$\beta = p + \frac{N - p^3}{3p^2}$$

Et :

THÉORÈME XXXVIII. *Si* p *est une valeur approchée de* $\sqrt[3]{N}$, $p + \frac{N - p^3}{3p^2}$ *est une valeur plus approchée de la même racine.*

449. Lorsque le degré d'approximation n'est pas fixé, on peut donc en employant les deux derniers théorèmes s'approcher de plus en plus de la racine de N ; à cet effet il suffit après une première approximation, de refaire le calcul en prenant au lieu de p la valeur *plus approchée* que l'on aura déterminée ; c'est là le calcul d'extraction par approximations successives.

EXERCICES.

1. *Théorème.* Considérant la fraction périodique simple

0, *abc.... pq abc.... pq....*

Prouver *à priori* que l'on a entre génératrices.

$$\frac{abc....pq}{999....99} = \frac{abc......pq\,abc......pq}{999......99\,999.....99}$$

2. *Théorème.* Considérant la fraction périodique mixte

$$0, \alpha\beta\gamma\delta\, abcd....\, pq\, abcd....\, pq....$$

comme ayant $\alpha\beta\gamma\delta\, a\, b$ pour partie non périodique et $c\, d....\, p\, q\, a\, b$ pour période, on demande de démontrer *à priori*, que

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta\, abcd....\, pqab - \alpha\beta\gamma\delta\, ab}{99....\, 9999000000} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\, abcd....\, pq - \alpha\beta\gamma\delta}{9999....\, 990000}$$

3. *Théoreme.* Si le dénominateur d'une fraction irréductible est un nombre premier autre que 2 et 5, 1° la période qui en résulte est d'un nombre pair de chiffres ; 2° la première moitié ajoutée à la seconde moitié donne une somme qui ne contient que des 9.

Corollaire. Dans la réduction en décimales, il suffit de calculer la première moitié de la période et on en conclut par une simple soustraction, l'autre demi période.

4. *Théorème.* Si deux fractions irréductibles $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$ pour lesquelles $B = B'$ donnent lieu à des périodes respectives de p et p' chiffres, on a aussi $p = p'$.

5. *Théorème.* Si plusieurs fractions irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entr'eux, ou n'ont d'autres facteurs communs que des puissances de 2 ou de 5, donnent lieu à des périodes de p, p', p'', etc. chiffres, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur le produit des dénominateurs des premières conduit à une période dont le nombre de chiffres est le moindre multiple de p, p', p'', etc.

6. *Théorème* Si les dénominateurs des fractions données contiennent des facteurs communs autres que 2 et 5, en

appelant D le moindre multiple de ces dénominateurs débarrassés des facteurs 2 et 5, toute fraction de dénominateur dégagé des facteurs 2 et 5 sera D, fournira une période dont le nombre de chiffres est le plus petit multiple des nombres de chiffres des périodes correspondantes aux premières fractions.

7. *Théorème.* La fraction $\frac{1}{D}$ donnant une période de p chiffres, la fraction $\frac{1}{D^\alpha}$ fournira une période ayant $p\,D^{p-1}$ chiffres. (D étant un nombre premier).

8. *Théorème.* Pour que $\frac{1}{D}$ et $\frac{1}{D^2}$ donnent lieu à des périodes d'un même nombre de chiffres, il faut et il suffit que (B étant la base du système de numération), on ait

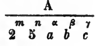
$$B^{D-1} - 1 = \dot{D}^2$$

9. *Théorème.* Si la période d'une fraction dont le dénominateur D est un nombre premier, est simple, elle renferme un nombre impair de chiffres.

10. *Théorème.* La somme ou la différence de deux fractions périodiques est aussi une fraction périodique.

11. *Théorème.* Si le dénominateur d'une fraction irréductible est premier avec 9, la période à laquelle pourra donner lieu cette fraction est divisible par 9; elle sera multiple de 99 si son nombre de chiffres étant pair le dénominateur n'est divisible par 9 ni par 11.

12. *Problème.* Déterminer le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu la conversion en décimales de la fraction irréductible



$$\frac{A}{2^m\, 5^n\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma}$$

Exemple

$$\frac{A}{4212}, \frac{A}{12495}$$

On trouvera *à priori* 18 et 336 pour nombres de chiffres périodiques.

13. *Problème.* Trouver les nombres N (N étant premier avec 10), tels que la période de $\frac{1}{N}$ ait 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. chiffres.

14. *Problème.* Diviser 3,5 par 0,438. Le quotient sera-t-il fini? s'il est périodique, déterminer les nombres de chiffres périodiques et non périodiques.

15. *Problème.* Convertir $\frac{5}{12}$ en fraction décimale. Peut on prévoir le nombre maximum des chiffres de la période.

16. *Problème.* Faire le carré de 0.3333....

17. *Problème.* Multiplier 0,272727.... par 0,2222....

18. *Problème.* Etant données les trois fractions périodiques

0,6666....

0,6363....

0,428571428571....

On demande l'excès de leur somme sur leur produit.

19. *Problème.* Peut-on trouver *à priori* le nombre de chiffres décimaux de la transformée à laquelle conduit la fraction $\frac{13}{80}$.

20. *Problème.* Déterminer la fraction ordinaire qui donne lieu à la fraction périodique mixte, ayant 4 chiffres périodiques, et 3 non périodiques, sachant de plus que la fraction demandée ne doit pas contenir le chiffre 9 en dénominateur. — Généraliser ce problème.

21 On demande de trouver

$$\sqrt{285970396644} \quad , \quad \sqrt{12088868379025}$$

22. Déterminer, à moins d'une unité près,

$$\sqrt{68497235} \quad , \quad \sqrt{53837687734}$$

23. Calculer, à moins de 0,00001 près,

$$\sqrt{29} \quad , \quad \sqrt{101} \quad , \quad \sqrt{7,65} \quad , \quad \sqrt{0,0073815}$$

$$\sqrt{7\tfrac{7}{16}} \quad , \quad \sqrt{\tfrac{19}{7}} \quad , \quad \sqrt{11\tfrac{3}{11}} \quad , \quad \sqrt{\frac{1923,40678}{6,4128356}}$$

$\sqrt{3,14159265358979323846264533832795}$ (à moins de $\frac{1}{10^{15}}$ près, *achèvement par* DIVISION).

24. Extraire $\sqrt{3\frac{1}{2}}$ (à moins de $\frac{1}{8}$ près).

25. *Théorème.* Le carré d'un nombre premier avec 5 est supérieur ou inférieur de 1 à un multiple de 5. En déduire que si un carré a^2 est égal à la somme de deux autres b^2 et c^2, l'un des trois nombres a, b ou c est divisible par 5.

26. *Théorème.* Un nombre impair qui est la somme de deux carrés est supérieur de 1 à un multiple de 4.

27. *Théorème.* Si l'on écrit les uns à la suite des autres les chiffres qui représentent les dizaines des carrés entiers consécutifs dont le chiffre d'unité est (1, 4, 6 ou 9), la suite que l'on obtiendra sera périodique; la période aura 10 chiffres et les deux chiffres à égale distance des extrêmes dans la période seront égaux.

28. *Théorème.* Lorsque des facteurs sont formés chacun par la somme de deux carrés, leur produit est aussi une somme de deux carrés.

29. *Théorème.* Si un nombre pair est la somme de deux carrés, sa moitié se trouve dans le même cas.

30. *Théorème.* Si un nombre entier divisible par 5 est la somme de deux carrés, le cinquième de ce nombre est aussi la somme de deux carrés.

31. *Théorème.* Lorsqu'un carré a^2 est la somme de deux autres b^2 et c^2, on a $b = \dot{4}$ *ou* $c = \dot{4}$

32. *Théorème* Lorsque $a^2 = b^2 + c^2$, si a^2 n'est pas divisible par 3, c^2 le sera.

33. *Théorème.* Si deux nombres N et N', composés chacun de $2n+1$ tranches de deux chiffres, ont les $n+1$ premières tranches à gauche en commun, la demi somme de ces nombres n'est pas supérieure à la racine carrée de leur produit d'un huitième de l'ordre le moins élevé.

· Calculer d'après cela la moyenne factorielle entre les fractions

$$0{,}1415926535589793 \quad \text{et} \quad 0{,}14159265409585$$

On appliquera avec avantage ce théorème, toutes les fois que N et N' auront au moins cinq décimales.

34. Calculer la moyenne factorielle des fractions $\frac{17}{19}$ et $\frac{53}{59}$.

35. Extraire $\sqrt{13{,}402850285\ldots}$, à moins de $\frac{1}{10^{11}}$ près, avec *achèvement par division.*

36. On demande de trouver

$$\sqrt[3]{7256313856} \quad , \quad \sqrt[3]{8108486729}$$

37. Déterminer, à moins d'une unité près,

$$\sqrt[3]{874538712} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{6738447201}{723}}$$

38. Calculer, à moins de 0,0001 près,

$$\sqrt[3]{267} \quad , \quad \sqrt[3]{29{,}57} \quad , \quad \sqrt[3]{0{,}918267}$$

$$\sqrt[3]{5\frac{5}{8}} , \sqrt[3]{\frac{37}{5}} , \sqrt[3]{4\frac{3}{4}} , \sqrt[3]{\frac{968574{,}635241}{73{,}081726}}$$

$\sqrt[3]{3,141592653589793238462643383279502}$, (à moins de $\frac{1}{10^{10}}$ près, *achèvement par* DIVISION).

39. Extraire $\sqrt[3]{25}$ à moins de $\frac{1}{7}$ près.

40. *Théorème.* Démontrer que

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n]^2$$

41. *Théorème.* Si l'on écrit les uns à la suite des autres les chiffres qui représentent les dizaines des cubes successifs, ayant pour chiffre d'unités un chiffre pair autre que zéro, la suite que l'on obtiendra sera périodique, et la période aura *cinq* chiffres.

42. *Théorème.* Si N et N' ont même nombre de chiffres, et plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, on a

$$\sqrt[3]{N} - \sqrt[3]{N'} < \frac{1}{3}$$

43. *Problème.* Un nombre entier étant donné, reconnaître s'il est la différence de deux cubes consécutifs, et déterminer ces cubes.

44. *Problème.* Trouver combien on devra payer pour nettoyer une citerne à faces rectangulaires, et en revêtir les faces d'une matière imperméable à l'eau : le plâtrage coûte 4 frs le mètre carré, et chaque seau de 4 litres $\frac{1}{2}$ revient en moyenne à 1 centime On sait que 1° la longueur de la citerne est les $\frac{5}{3}$ de la largeur, qui n'est que le $\frac{1}{4}$ de la profondeur ; 2° la citerne n'est remplie qu'aux $\frac{9}{10}$; 3° après avoir tiré 27 seaux d'eau, le niveau s'est abaissé au 40° de la profondeur.

LIVRE VIII.

PROPRIÉTÉS DES PROGRESSIONS. — THÉORIE ET CALCUL DES LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

Des Progressions.

Progression par différence; raison. — Notions générales sur les nombres négatifs. — Somme de deux nombres négatifs ou positifs tous les deux, ou l'un positif et l'autre négatif. — Composition d'un terme de rang quelconque par rapport au premier ou au dernier terme d'une progression différentielle. — Insertion de moyens différentiels; insertions successives. — Des nombres donnés peuvent toujours faire partie d'une même progression par différence. — Somme des termes d'une progression par différence. — Trouver la somme des n premiers nombres impairs. — Trouver un carré qui soit la somme de deux carrés. — Trouver la somme des carrés des n premiers nombres entiers. — Progressions par quotient; raison. — Composition d'un terme de rang quelconque par rapport au premier, ou au dernier terme d'une progression par quotient. — Insertion de moyens factoriels; insertions successives. — Produit des termes d'une progression par quotient. — Somme des termes d'une progression par quotient. — Puissances successives des nombres plus grands ou plus petits que 1. — Limite de la somme des termes d'une progression décroissante illimitée. — Génératrice des fractions périodiques. — Somme des n premiers nombres de la forme nq^n, dans laquelle on donne à n toutes les valeurs comprises entre 1 et n.

DES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE.

450. Une suite de nombres se déduisant les uns des autres d'après une loi déterminée, porte le nom de *suite* ou de *série numérique;* chacun de ces nombres est un terme de la série caractérisée par sa loi de génération.

Nous ne nous occuperons ici que de deux espèces de suites, remarquables par la simplicité de leur génération, et dont les propriétés sont d'une indispensable nécessité.

On appelle *progression par différence* une série numérique dans laquelle la différence de deux termes consécutifs est constante; cette différence prend le nom de *raison* et doit toujours être comptée dans le même sens. La progression est *croissante* ou *décroissante*, suivant que les termes vont en augmentant ou en diminuant : dans le premier cas, la raison s'obtient en soustrayant un terme de son *suivant;* et dans le second cas, en le soustrayant de son *précédent.*

Les termes d'une progression par différence s'appellent aussi *moyens différentiels.* En convenant d'employer la lettre t avec un numéro égal au rang du terme que l'on veut représenter, on adopte la notation suivante :

$$\div\ t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots \quad t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$$

451. Comme il est indispensable de donner maintenant à l'idée d'une progression par différence *toute l'extension* NÉCESSAIRE *dont elle est susceptible*, nous sommes amenés à considérer les nombres sous un point de vue plus général que celui auquel nous nous sommes placés jusqu'ici.

De la même manière que (+ 5) INDIQUE l'addition de 5 unités, la notation (— 5) indique la soustraction de 5 : dès lors il est évident que les nombres, ou les quantités *négatives* s'ajouteront entr'elles comme les quantités positives, avec la

seule précaution de donner à la somme le signe — . En effet supposons que l'on ait l'addition

$$(-5) + (-3)$$

En supposant toujours une personne qui doit 5, on peut dire que le mauvais état de ses affaires s'accroissant encore, elle se crée ou s'ajoute une nouvelle dette égale à 3 ; sa dette totale sera donc $5+3$, et pour exprimer que ce dernier nombre doit être *payé*, c'est-à-dire *soustrait* de la caisse du débiteur, il faut le qualifier du signe —, ce qui donne

$$(-5) + (-3) = -(5+3)$$

Considérons aussi le cas de l'addition de deux nombres de *signes contraires*, et soit par exemple

$$(+8) + (-3)$$

S'approprier une dette ou *diminution* de fortune, c'est évidemment reconnaître que sa fortune doit être diminuée du montant de cette dette, et dans ce sens on peut dire que l'on *ajoute une dette*; on aura donc

$$(+8) + (-3) = +8 - 3$$

Si l'on avait à additionner $+3$ à -8, il viendrait de même ,

$$(+3) + (-8) = +3 - 8$$

Arrêtons-nous un instant sur la soustraction $3 - 8$.

Nous sommes habitués à dire que la soustraction de 8 hors de 3 est *impossible*, mais il ne faut pas comprendre par là que cette opération est *absurde*. En effet, lorsqu'une personne qui ne possède que 3 doit 8, elle paie d'abord 3, pour réduire ainsi sa dette à $8-3$; c'est évidemment ce que chacun fait et comprend *en dehors de toute considération mathématique.*

Exprimant enfin par les signes de l'arithmétique que 8 — 3 est une dette, ou une somme à soustraire, on obtient

$$(+3) + (-8) = +3 - 8 = -(8 - 3)$$

D'autre part,

$$(+8) + (-3) = +8 - 3 = +(8 - 3)$$

D'où l'on conclut cette règle : *Pour soustraire deux nombres, retranchez le plus petit du plus grand, et donnez au reste obtenu le signe du plus grand.*

452. Théorème I. *Un terme quelconque d'une progression différentielle est égal au premier,* PLUS *autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui, ou au dernier* MOINS *autant de fois la raison qu'il y a de termes après lui.*

Démonstration. Soient α la raison de la progression, et n, ω des nombres entiers entre lesquels ω est plus grand que n. Par définition on a :

$$t_2 = t_1 + \alpha$$
$$t_3 = t_2 + \alpha$$
$$t_4 = t_3 + \alpha$$
$$\vdots$$
$$t_{n-1} = t_{n-2} + \alpha$$
$$t_n = t_{n-1} + \alpha$$

Le nombre de ces égalités est évidemment inférieur de 1 au rang n du terme t_n ; l'addition membre à membre fournira, en remarquant que le premier membre de chaque égalité est détruit par le premier terme du second membre de l'égalité suivante,

$$t_n = t_1 + (n - 1)\alpha \qquad (1)$$

En second lieu, dans la progression donnée on pourrait considérer spécialement la série

$$t_n\ ,\ t_{n+1}\ ,\ t_{n+2}\ \ldots\ t_{\omega-1}\ ,\ t_\omega$$

ayant $\omega - n + 1$ termes; on aura alors d'après la formule qui vient d'être établie,

$$t_\omega = t_n + (\omega - n)\,\alpha,\ \textit{d'où}\ t_n = t_\omega - (\omega - n)\,\alpha \qquad (2)$$

La formule (1) renferme quatre quantités α, t_1, t_n, n; elle permet donc de résoudre quatre problèmes différents, lorsque connaissant trois de ces quantités on demande la quatrième.

En particulier si α est inconnu, on aura :

$$\alpha = \frac{t_n - t_1}{n-1}$$

Donc, *la raison d'une progression par différence est égale au quotient de la différence du premier terme à un terme quelconque, par le nombre de termes qui précèdent celui-ci.*

453. Problème. *Insérer* m *moyens différentiels entre deux nombres donnés* p *et* q.

En d'autres termes, trouver la raison d'une progression dont p et q sont le premier et le dernier terme, et ayant $m+2$ termes. Dans la formule précédente, il suffira donc de poser

$$t_n = q\ \ ,\ \ t_1 = p\ \ ,\ \ n = m+2$$

Et l'on aura

$$\alpha = \frac{q-p}{m+1}$$

Il suffira donc de *diviser la différence des nombres donnés par le nombre plus un des moyens à insérer.*

454. On pourrait avoir $m = 1$, dès lors

$$\alpha' = \frac{q-p}{2}$$

Le moyen à insérer reçoit alors le nom de *moyen arithmétique*, (n° 243) ou simplement *moyenne entre* p *et* q, et a pour valeur :

$$p+\frac{q-p}{2} \quad ou \quad \frac{p+q}{2}$$

455. Théorème ii. *Si l'on insère le même nombre de moyens différentiels entre les termes consécutifs d'une même progression par différence, la suite obtenue est une progression par différence.*

Démonstration. Pour obtenir la nouvelle raison, on divise par le même nombre (celui des moyens à insérer, plus 1) la différence de deux termes consécutifs : or cette différence est constante pour toute l'étendue de la progression; le dernier terme d'une insertion étant le premier de l'insertion suivante, toutes ces progressions partielles ne forment qu'une seule et même progression.

456. Théorème iii. *L'insertion de* m m'—1 *moyens différentiels entre deux nombres donnés* p et q *peut se faire en insérant d'abord entre ces nombres* m — 1 *moyens, puis* m'— 1 *moyens entre les termes consécutifs de la progression obtenue.*

Démonstration. La raison x de l'insertion de $m-1$ moyens est

$$x=\frac{q-p}{m}$$

La raison y de la seconde insertion de $m'-1$ moyens différentiels, est

$$y=\frac{x}{m'} \quad ou \quad y=\frac{q-p}{m\,m'}$$

Or la raison z de l'insertion directe de $m\,m'-1$ moyens entre p et q eut donné :

$$z=\frac{q-p}{m\,m'}$$

D'où l'on voit que

$$z = y \qquad (c.q.f.d.)$$

457. Corollaire i. *L'insertion entre deux nombres* p *et* q *de* m′ m″.... — 1 *moyens différentiels peut se faire successivement par celles de*

1° m — 1 *moyens entre* p *et* q, *d'où il résulte une progression* g.

2° m′ — 1 *moyens entre les termes consécutifs de* g; *il en résulte une autre progression* g′.

3° m″ — 1 *moyens entre les termes consécutifs de* g′ ; *il en résulte une autre progression* g″, *etc.*

458. Corollaire ii. *Les nombres que l'on introduit dans une progression par différence par les insertions continues de de* m — 1, m′ — 1, m″ — 1, etc., *moyens différentiels peuvent être introduits par l'insertion continue de* m m′ m″... — 1 *moyens par différence.*

459. Problème. *Trouver la raison d'une progression dont les nombres* quelconques p, q, r, s, t *font partie.*

Supposons que ces nombres soient rangés par ordre de grandeur: en général comme ils sont fractionnaires, on pourra les réduire au même dénominateur, et former les différences correspondant à

$$q-p \quad , \quad r-q \quad , \quad s-r \quad , \quad t-s$$

Ces différences devront contenir un nombre entier de fois la raison de la progression cherchée; cette raison aura donc pour dénominateur, le dénominateur commun des nombres donnés, et pour numérateur *un* des diviseurs communs entre les numérateurs de ces différences.

460. *Dans toute progression par différence la somme des termes équidistants des extrêmes est égale à la somme des extrêmes.*

Démonstration. Soit la progression

$$\div \; t_1 \; , t_2 \; , t_3 \; , \qquad t_n , \qquad t_{\omega-n+1} , \qquad t_\omega$$

dont la raison est α, et dans laquelle n étant moindre que ω, les termes t_n et $t_{\omega-n+1}$ sont également distants des extrêmes t_1 et t_ω. On a vu (n° 452) que

$$t_n = t_1 + (n-1)\alpha$$

$$t_{\omega-n+1} = t_\omega - (n-1)\alpha$$

D'où par addition :

$$t_n + t_{\omega-n+1} = t_1 + t_\omega \qquad (c.q.f.d.)$$

Remarque. Cette propriété serait encore vraie pour la progression

$$a-n\beta, .. a-3\beta, a-2\beta, a-\beta, a, a\beta, a+2\beta, a+3\beta, .. a+n\beta$$

On peut même dire qu'alors elle est évidente puisque les extrêmes étant $a+n\beta$ et $a-n\beta$ et ayant $2a$ pour somme, on a quel que soit i,

$$(a+i\beta) + (a-i\beta) = 2a = (a+n\beta) + (a-n\beta)$$

Nous aurons à utiliser cette remarque (n° 497, théorie des logarithmes), en considérant la progression suivante dans laquelle $a = o$,

$$-n\beta, \ldots. -3\beta, -2\beta, -\beta, o, \beta, 2\beta, 3\beta, \ldots. n\beta$$

461. Théorème v. *La somme des termes d'une progression par différence est la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre de termes.*

Démonstration. Soit S_n la somme des n premiers termes; de manière que

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots. + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$$

Ecrivons aussi

$$S_n = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots. + t_3 + t_2 + t_1$$

Additionnant membre à membre ces deux relations, et faisant emploi de la propriété précédente, il viendra

$$2\,S_n = (t_1 + t_n)\,n, \quad d'où \quad S_n = \frac{t_1 + t_n}{2} \quad (c.q.f.d.)$$

462. PROBLÈME. *Calculer la somme des* n *premiers nombres impairs.*

Ces nombres forment une progression dont le premier terme est 1 et dont la raison est 2; le n^e terme de la série est donc

$$1 + 2\,(n - 1) = 2n - 1$$

Et la somme S de ces n termes est (n° 461),

$$S = n^2$$

Ce qui démontre ce

THÉORÈME VI. *La somme des* n *premiers nombres impairs est égale au carré du nombre de ces termes.*

463. PROBLÈME. *Trouver deux carrés dont la somme soit un carré.*

Dans la progression

$$\div\ 1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ 13...$$

Choisissons un carré et considérons la somme des n termes qui précèdent; ce carré ajouté à cette somme qui, d'après le théorème précédent, est égale à n^2 donnera pour total la somme d'un certain nombre des $n + 1$ premiers nombres impairs; ce total est donc $(n+1)^2$

Ainsi 9 augmenté de 16 ou de la somme des 4 termes qui précèdent donne le carré 25 qui est la somme des 5 premiers nombres impairs.

464. PROBLÈME. *Trouver la somme des carrés des* n *premiers nombres entiers.*

C'est-à-dire calculer

$$S = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + \overline{n-2}^2 + \overline{n-1}^2 + n^2$$

Décomposons cette somme ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+\ldots\quad +\overline{n+2}+\overline{n-1}+n \\ 2+3+4+\ldots\quad +\overline{n+2}+\overline{n-1}+n \\ 3+4+\ldots\quad +\overline{n+2}+\overline{n-1}+n \\ 4+\ldots\quad +\overline{n+2}+\overline{n-1}+n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \overline{n+2}+\overline{n-1}+n \\ \overline{n-1}+n \\ n \end{array}$$

Chaque ligne est la somme d'une progression par différence dont la raison est 1; les sommes de ces progressions sont :

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1),\ \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n+2),\ \tfrac{1}{2}\,(n-2)\,(n+3)\,\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\,(n-i+1)\,(n+i)\ldots,\ n$$

Abstraction faite du dénominateur 2, ces sommes partielles pourront s'écrire respectivement

$$\begin{array}{l} n\,(n+1) \\ (n-1)\,(n+1)+(n-1) \\ (n-2)\,(n+1)+(n-2)\,2 \\ (n-3)\,(n+1)+(n-3)\,3 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ (n-i+1)\,(n+1)+(n-i+1)\,(i-1) \\ \quad\vdots \\ (n-n+1)(n+1)+(n-n+1)(n-1) \end{array}$$

D'où par addition,

$$2\,S = (n+1)\sum_{0}^{n-1}(n-i) + \sum_{1}^{n-1} i\,(n-i)$$

$$2\,S = (n+1)\sum_{0}^{n-1}(n-i) + n\sum_{1}^{n-1} i - \sum_{1}^{n-1} i^2$$

Mais comme sommes de nombres naturels commençant toutes à 1, on a

$$\sum_0^{n-1} (n-i) = \sum_1^n i = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\sum_1^{n-1} i = \frac{n-1}{2} \cdot n$$

Et

$$\sum_1^{n-1} i^2 = \sum_1^n i^2 - n^2 = S - n^2$$

Il viendra dès lors après substitutions,

$$2S = \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2}{2}(n-1) + n^2 - S$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$$

Des progressions par quotient.

465. Une progression par quotient est une suite numérique dont chaque terme est le produit du précédent par un facteur constant, qui porte le nom de *raison* de la progression.

Une progression par quotient est *croissante* ou *décroissante* selon que la raison est plus grande ou plus petite que 1.

Les différents termes d'une progression par quotient s'appellent *moyens factoriels*.

En général voici comment on note une semblable série :

$$\div\!\!\div \; t_1 \;, t_2 \;, t_3 \;, \qquad t_k, \qquad t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$$

Théorème vii. *Un terme quelconque d'une progression par quotient, est égal au produit du premier terme par une puissance de la raison dont le degré est égal au nombre des termes qui précèdent ;* ou, *est égal au quotient du dernier terme par une puissance de la raison dont le degré est égal au nombre de termes qui suivent.*

Démonstration. En représentant par q la raison, on a

$$\left.\begin{array}{l} t_2 = q\, t_1 \\ t_3 = q\, t_2 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ t_{n-1} = q\, t_{n-2} \\ t_n = q\, t_{n-1} \end{array}\right\} \quad (a)$$

Multipliant, membre à membre, ces diverses relations, on obtient après toutes simplifications :

$$t_n = q^{n-1}\, t_1 \qquad (c.q.f.d.$$

En second lieu, on peut considérer isolément la progression

$$t_k \dots t_{n-2},\, t_{n-1},\, t_n$$

dont le premier terme est t_k, le dernier t_n, la raison q, et le nombre de termes $n - k + 1$; on aura dès lors et en vertu de la partie déjà démontrée de la proposition :

$$t_k = q^{n-k} \cdot t_k, \quad \text{d'où} \quad t_n = \frac{t_n}{q^{n-k}}$$

Or $n - k$ est le nombre de termes qui suivent t_k.

467. La formule

$$t_n = q^{n-1}\, t_1$$

renfermant les quatre quantités t_1, q, n et t_n permet la solution de quatre problèmes dont l'une de ces quantités serait l'inconnue et les trois autres les données.

En particulier si q est l'inconnue, on aurait

$$q^{n-1} = \frac{t_n}{t_1}$$

Mais la racine $(n-1)^{me}$ d'un nombre $\frac{t_n}{t_1}$ est, d'après la définition donnée (n° 442) une quantité q qui, élevée à la $(n-1)^{me}$ puissance, donne le nombre $\frac{t_n}{t_1}$; d'où l'on déduit

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Ce qui apprend que :

La raison d'une progression par quotient s'obtient en extrayant du quotient d'un terme quelconque par le premier, la racine dont l'indice est le nombre de termes qui précèdent le terme considéré.

468. **Problème.** *Insérer* m *moyens factoriels entre deux nombres donnés* p *et* q.

Il suffit pour trouver la raison x de cette insertion, de faire

$$n = m + 2 \quad , \quad t_1 = p \quad , \quad t_n = q$$

dans la formule précédente; on aura ainsi

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{q}{p}}$$

Du quotient des nombres donnés, il faudra donc extraire la racine d'un indice égal au nombre plus 1 de moyens à insérer.

469. Si $m = 1$. on a :

$$x = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

470. **Théorème viii.** *Si l'on insère le même nombre de moyens factoriels entre les termes consécutifs d'une même progression. la suite obtenue est une progression par quotient.*

Démonstration. Pour obtenir la nouvelle raison on extrait du quotient de deux termes consécutifs une racine d'indice constant; or ce quotient est aussi constant puisqu'il est égal à la raison; le dernier terme d'une insertion étant le premier de l'insertion suivante, toutes ces progressions partielles ne forment qu'une seule et même progression.

471. Théorème ix. *L'insertion de* mm' — 1 *moyens factoriels entre deux nombres donnés* p *et* q *peut se faire en insérant d'abord* m — 1 *moyens entre ces nombres, puis* m' — 1 *moyens entre les termes consécutifs de la progression résultante.*

Démonstration. La raison x de l'insertion factorielle de $m-1$ moyens, a pour valeur

$$x=\sqrt[m]{\frac{q}{p}}$$

La raison y de la seconde insertion, est

$$y=\sqrt[m']{x}=\sqrt[mm']{\frac{q}{p}}$$

Or la raison z de l'insertion directe de $mm'-1$ moyens, est donnée par

$$z=\sqrt[mm']{\frac{q}{p}}$$

D'où l'on voit que $z=y$. (*c.q.f.d.*)

472. Corollaire i. L'insertion entre deux nombres p et q de $m.m'.m''....-1$ moyens factoriels peut se faire successivement par celles de

1° m — 1 *moyens entre* p *et* q, *d'où il résulte une progression* G.

2° m' — 1 *moyens factoriels contenus dans* G, *ce qui donne la progression* G'.

3° m″ — 1 *moyens factoriels contenus dans* G′, *ce qui donne la progression* G″ ; *etc.*

Corollaire ii. *Les nombres que l'on introduit dans une progression par quotient par l'insertion continue de* m — 1, m′—1, m″—1, *etc., moyens factoriels, peuvent être introduits par l'insertion immédiate de* m m′ m″... —1 *moyens par quotient.*

474. Théorème x. *Dans toute progression par quotient le produit de deux termes équidistants des extrêmes est égal au produit des extrêmes.*

Démonstration. Dans la progression

$$\div\div\ t_1, t_2, t_3, \ldots\ \ t_k, \ldots\ t_{\omega-k+1}, \ldots\ \ t_\omega$$

les termes t_k et $t_{\omega-k+1}$ sont également éloignés des extrêmes; on sait que :

$$t_k = q^{k-1}\, t_1$$

$$t_{\omega-k+1} = \frac{t_\omega}{q^{k-1}}$$

D'où par multiplication,

$$t_k \cdot t_{\omega-k+1} = t_1 \cdot t_\omega \qquad (c.q.f.d.)$$

Corollaire. *Le produit des termes d'une progression par quotient est égal à la racine carrée du produit des extrêmes élevé à la puissance dont le degré est égal au nombre des termes.*

En effet si l'on pose

$$P = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot\ \ldots\ t_n$$

Et qu'après avoir écrit à rebours,

$$P = t_n \cdot t_{n-1} \cdot t_{n-2}\ \ \ldots\ \ t_1$$

On multiplie membre à membre ces deux égalités, il viendra, conformément au théorème précédent :

$$P^2 = (t_1 \cdot t_n)^n$$

476. Théorème xi. *La somme des* n *premiers termes d'une progression par quotient est le quotient de l'excès du* $(n+1)^{me}$ *terme sur le premier, par la raison diminuée de* 1.

Démonstration. Si l'on représente par S_n la somme des n premiers termes de la progression, on aura en additionnant membre à membre les égalités (a) du n° 406.

$$S_n - t_1 = q\,(S_n - t_n)$$

D'où

$$S = \frac{q\,t_n - t_1}{q-1} \qquad (c.q.f.d.)$$

477. Remarque. Si $q < 1$, comme les termes vont en décroissant, l'avant dernière égalité se mettra sous les formes

$$S_n - t_1 \;= q\,S_n - q\,t_n$$
$$S_n - qS_n = \;t_1 - q\,t_n$$

D'où

$$S_n = \frac{t_1 - q\,t_n}{1-q}$$

Cette formule sommatoire s'obtient de celle qui est relative à $q > 1$ en convenant de changer simultanément le sens dans lequel sont calculés les excès $t_{n+1} - t_1$ et $q - 1$

478. Théorème xii. *Les puissances successives d'un nombre* N, *plus grand que* 1, *croissent indéfiniment*, c'est-à-dire qu'elles finissent par surpasser tout nombre donné.

Démonstration. Pour former ces puissances successives il faut multiplier par N l'une d'elles N^k ; or lorsque le multiplicateur est plus grand que 1, le produit est plus grand que le multiplicande ; d'où l'on voit que

$$N^{k+1} > N^k$$

Cette formation de puissances étant continuée dépassera nécessairement tout nombre que l'on pourrait assigner.

479. Théorème xiii. *Les puissances successives d'un nombre N plus petit que 1, décroissent indéfiniment en convergeant vers la limite* zéro *qu'elles ne peuvent jamais atteindre.*

Démonstration. En considérant encore le produit

$$N^{k+1} = N^{k} . N$$

dont le multiplicateur N est moindre que 1, on conclut que

$$N^{k+1} < N^{k}$$

donc les puissances deviennent de plus en plus petites, et convergent ainsi vers *zéro.*

480. Théorème xiv. *La somme des termes d'une progression décroissante par quotient a pour limite le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.*

Démonstration. Dans le cas d'une progression décroissante, nous avons trouvé (nº 476) :

$$S_n = \frac{t_1 - t_n}{1 - p}$$

On sait que

$$t_n = t_1 . q^{n-1}$$

Or $q < 1$, donc les puissances de q ayant *zéro* pour limite de leur décroissance continue, il est clair que $t_1 . q^{n-1}$ a aussi *zéro* pour limite ; donc on a :

$$\text{limite } S = \frac{t_1}{1-q} \qquad (c.q.f.d.)$$

481. *Exemple.* On demande la limite de la somme

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \dots$$

On aura donc ici $q = \frac{1}{\alpha}$, $t = 1$, et par suite

$$\text{limite S} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Ainsi si pour $\alpha = 3$, l'on avait la série

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \ldots$$

On trouverait que cette suite *illimitée* représente le nombre $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$.

482. Problème. Trouver la limite ou la génératrice de la fraction périodique

$$g = 0{,}\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho\; a\,b\,c\,d \ldots p\,q\; a\,b\,c.d \ldots p\,q \ldots$$

La période ayant m chiffres, et la partie non périodique n. Pour plus de facilité multiplions de part et d'autre par 10^n, et nous aurons

$$10^n.g = \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho + 0{,}a\,b\,c\,d \ldots p\,q\,a\,b\,c\,d \ldots p\,q \ldots$$

La périodique simple du second membre peut être considérée comme une progression décroissante illimitée pour laquelle

$$t_1 = 0{,}a\,b\,c\,d \ldots p\,q$$
$$\text{raison} = 0{,}0000 \ldots 01$$

La raison et t_1 ayant le même nombre de chiffres décimaux, il viendra :

$$10^n.\,g = \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho + \frac{0{,}abcd \ldots pq}{1 - 0{,}0000 \ldots 01} = \alpha\beta\gamma \ldots \varrho + \frac{abcd \ldots qq}{10^m - 1}$$

ou

$$10^n.\,g = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho \times 10^m + abcd \ldots pq - \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho}{10^m - 1}$$

D'où enfin

$$g = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho\, abcd \ldots pq - \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \varrho}{(10^m - 1)\,10^n}$$

Ce qui est la formule déjà trouvée par une autre théorie; pour les périodiques simples on poserait

$$n=0\ ,\ \text{et}\ \alpha\beta\gamma\ldots.\rho=0$$

483. Problème ii. *Quelle est la somme des* n *premiers nombres de la forme* n q^n.

Il s'agit donc de calculer la somme

$$S=q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n$$

Cette somme peut, par décomposition, recevoir la forme

$$S=\left\{\begin{array}{l} q+q^2+q^3+\ldots.+q^k+\ldots.+q^n \\ \quad q^2+q^3+\ldots.+q^k+\ldots.+q^n \\ \qquad q^3+\ldots.+q^k+\ldots.+q^n \\ \qquad\qquad\quad \cdot \\ \qquad\qquad\quad \cdot \\ \qquad\qquad\quad \cdot \\ \qquad\qquad\quad q^k+\ldots.+q^n \end{array}\right.$$

Désignons par s_1, s_2, s_3 .... s_k.... s_n les sommes des progressions que constituent les diverses lignes de la décomposition de S, et dont la raison commune est q, alors que les premiers termes respectifs sont q, q^2, q^3,.... q^k.... q^n. On a

$$s_1=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$$

$$s_2=\frac{q^{n+1}-q^2}{q-1}$$

$$s_3=\frac{q^{n+1}-q^3}{q-1}$$

$$s_k=\frac{q^{n+1}-q^k}{q-1}$$

$$s_n=\frac{q^{n+1}-q^n}{q-1}$$

D'où par addition,

$$S = \frac{n q^{n+1} - \dfrac{q^{n+1} - q}{q-1}}{q-1}$$

et, après réductions,

$$S = \frac{n q^{n+1}}{q-1} - q \frac{q^n - 1}{(q-1)^2}$$

484. La formule (nº 165),

$$S = \sum_0^p a^i \cdot \sum_0^q b^i \cdot \sum_0^r c^i \cdot \sum_0^s d^i$$

fournit la somme de tous les diviseurs d'un nombre donné; mais en vertu de la formule sommatoire d'une progression par quotient, on a

$$\sum_0^p a^i = \frac{a^{p+1} - 1}{a-1}$$

$$\sum_0^q b^i = \frac{b^{q+1} - 1}{b-1}$$

$$\sum_0^r c^i = \frac{c^{r+1} - 1}{c-1}$$

$$\sum_0^s d^i = \frac{d^{s+1} - 1}{d-1}$$

D'où l'on a, après substitution,

$$S = \frac{(a^{p+1} - 1)\ (b^{q+1} - 1)\ (c^{r+1} - 1)\ (d^{s+1} - 1)}{(a-1)\ \ (b-1)\ \ (c-1)\ \ (d-1)}$$

CHAPITRE II.

—

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Définition des logarithmes. — Extension des deux progressions de part et d'autre de 1 et 0 respectivement. — Un nombre quelconque positif a toujours un logarithme, qui est le même quelle que soit la raison de la progression par quotient. — Base d'un système. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre ait un logarithme commensurable. — Les logarithmes croissent en même temps que les nombres. — La différence de deux logarithmes est d'autant plus faible que la différence des nombres est petite. — Les différences entre les nombres croissent plus rapidement que les différences entre les logarithmes correspondants. — La différence logarithmique converge vers zéro, pour un accroissement déterminé, lorsque le nombre considéré croît indéfiniment. — Nécessité des termes 1 et 0 dans les deux progressions, et de leur correspondance. — Logarithmes considérés au point de vue exponentiel. — Logarithme d'un produit, d'un quotient ou d'une fraction, d'une puissance, d'une racine. — Des différents systèmes de logarithmes. — Rapport constant des logarithmes de deux nombres dans un système quelconque; passage d'un système à un autre. — Module, sa définition et sa valeur. — Calcul du logarithme d'un nombre donné. — Des logarithmes de Briggs.

485. Considérons les deux progressions

$$\div\div\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots\ \alpha^m, \ldots\ \alpha^n.$$
$$\div\ 0,\ \beta,\ 2\beta,\ 3\beta, \ldots\ m\beta, \ldots\ n\beta.$$

l'une par quotient et commençant par l'unité, l'autre par différence, commençant par zéro, et dans lesquelles les termes 1 et 0 se correspondent.

On nomme *logarithmes* des termes de la progression factorielle, que nous représenterons pour abréger par Q, les termes de même rang de la progression par différence, notée D.

Ces deux progressions forment par leur ensemble un *système de logarithmes* et ne sont assujetties qu'à la seule condition d'avoir 1 et 0 pour premiers termes. On a ainsi par définition, et en général

$$\log \alpha^n = n\beta$$

la syllabe *log* placée devant le nombre α^n, s'énonce *logarithme*.

486. En supposant α et β quelconques, α étant cependant plus grand que 1, il est clair que nous n'avons à considérer, comme nombres pouvant faire partie de Q, que les nombres plus grands que 1. Il semble dès lors que les nombres qui ne sont pas des termes de Q, n'ont pas de logarithmes; nous allons prouver que

THÉORÈME I. *Tous les nombres, plus grands ou plus petits que 1, ont leurs logarithmes.*

Démonstration. 1° Pour que la progression par quotient comprenne à la fois les nombres supérieurs et inférieurs à 1, il suffit de la prolonger vers la gauche, ayant égard au prolongement dans le même sens de la progression par différence.

On aura ainsi les séries

$$\frac{1}{\alpha^n} \cdots \frac{1}{\alpha^3}\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha},\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots \alpha^m \ldots \alpha^n$$

$$-n\beta \ldots, -3\beta, -2\beta, -\beta,\ 0,\ \beta,\ 2\beta,\ 3\beta, \ldots m\beta \ldots n\beta$$

Et l'on dira encore que les termes de la seconde sont les logarithmes des termes de même rang de la première : on a donc

$$\log \frac{1}{\alpha^n} = -\log \alpha^n$$

2° Quand un nombre N ne fait pas partie de la progression Q, voici comment on procède :

On insère *continuement* entre les termes consécutifs de la première et de la seconde progression un même nombre plus ou moins grand de moyens ; si l'un des termes insérés dans Q est égal à N, son correspondant dans D est le logarithme de N.

Mais si N ne se confond pas avec l'un des moyens de l'insertion continue, on trouvera deux termes consécutifs entre lesquels N sera compris et tels que l'on ait, par exemple,

$$\alpha^l < \mathrm{N} < \alpha^{l+1}$$

On déduit par l'examen de l'autre progression

$$l\beta < \log \mathrm{N} < (l+1)\,\beta$$

En concevant que l'on augmente indéfiniment le nombre des moyens introduits, on voit que le logarithme du nombre N est plus grand que les logarithmes des nombres inférieurs à N, et moindre que les nombres commensurables qui sont les logarithmes des nombres supérieurs à N; $l\beta$ et $(l+1)\,\beta$ sont donc des valeurs approchées de log N qui est ainsi la limite vers laquelle tendent indéfiniment et par degrés insensibles les logarithmes des nombres plus petits que N.

Le cas où N ne peut être introduit dans Q est fréquent : si pour particulariser les progressions Q et D nous prenons

$$\begin{array}{llllll} \div\!\div & 1, & 10, & 100, & 1000, & 10000\ldots \\ \div & 0, & 1, & 2, & 3, & 4\ldots \end{array}$$

et si m est le nombre des moyens insérés, on a pour raison ρ d'insertion

$$\rho = \sqrt[m+1]{10}$$

D'où l'on voit que quel que soit m aucun de ces moyens n'est commensurable avec 1.

487. Théorème ii. *Un nombre déterminé* N *de la progression par quotient a toujours le même logarithme, quelle que soit la raison de cette progression.*

Démonstration. Il faut prouver que si un nombre peut être introduit de plusieurs manières différentes dans la progression Q, on trouvera toujours le même terme correspondant ou logarithme.

Supposons que par les *insertions continues* de p et p' moyens factoriels on ait rencontré le même nombre N qui chaque fois est ainsi une puissance de la raison d'insertion : r et r' étant les degrés respectifs de ces puissances, on a donc :

$$\left(\sqrt[p+1]{\alpha}\right)^{r} = \left(\sqrt[p'+1]{\alpha}\right)^{r'}$$

Elevons les deux membres de cette égalité à la $(p+1)\,(p'+1)^{e}$ puissance : en particulier le premier membre montre que $\sqrt[p+1]{\alpha}$ sera, par suite de cette élévation, prise $r\,(p+1)\,(p'+1)$ fois comme facteur ; et comme l'ordre de multiplication est indifférent, on pourra d'abord multiplier $p+1$ facteurs égaux à $\sqrt[p+1]{\alpha}$ ce qui donnera (n° 442)

$$\left(\sqrt[p+1]{\alpha}\right)^{p+1} = \alpha$$

De même on aurait,

$$\left(\sqrt[p'+1]{\alpha}\right)^{p'+1} = \alpha$$

Et par suite

$$\alpha^{r(p'+1)} = \alpha^{r'(p+1)}$$

$$r(p'+1) = r'(p+1)$$

Multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{\beta}{(p+1)(p'+1)}$, il viendra :

$$\frac{r\beta}{p+1} = \frac{r'\beta}{p'+1}$$

Or $\frac{\beta}{p+1}$ et $\frac{\beta}{p'+1}$ étant les raisons différentielles d'insertions continues relatives à p et à p' moyens, il est évident que cette dernière égalité exprime que les logarithmes, que l'on obtient par ces insertions, sont égaux. (*c.q.f.d.*)

488. De la propriété (n° 457) il résulte donc que, si l'on calcule des logarithmes à l'aide d'insertions continues diverses, dont les nombres de moyens sont représentées par $p-1$, $p'-1$, $p''-1$, $p'''-1$, etc., l'on peut considérer ces logarithmes comme faisant partie d'une même insertion continue de $p\,p'\,p''\,p'''....-1$ moyens, ou d'un même système de logarithmes.

Les nombres et leurs logarithmes, définis comme nous venons de le faire précédemment croissent d'une manière insensible et ont entr'eux des différences aussi petites que l'on voudra.

580. On appelle *base* d'un système de logarithmes le nombre dont 1 est le logarithme ; ainsi 10 est la base du système décimal

$$\div\!\div\ 1,\ 10,\ 100,\ 1000....$$
$$\div\ 0,\ 1,\ 2,\ 3....$$

Un système de logarithmes est défini par sa base b ; et dans un système quelconque on a,

$$\log 1 = 0, \ \log b = 1$$

En général si a est un terme de la progression par quotient, tel que

$$a = \alpha^i$$

on aura en élevant à la puissance n (n étant un nombre entier).

$$a^n = \alpha^{ni}$$

Le nombre α^{ni} se rencontre aussi dans la progression factorielle, et a $n.i\beta$ pour logarithme; d'où l'on voit que $i\beta$ étant le logarithme de a, on a

$$\log (a^n) = n.\log a.$$

Il s'en suit que dans le système quelconque de logarithmes,

$$\log 1 = 0,\ \log b = 1,\ \log b^2 = 2,\ \log b^3 = 3,\ \text{etc.},\ \log b^n = n.$$

490. Nous avons eu l'occasion de faire remarquer (n° 486) qu'entre les différentes puissances de 10 pour le système décimal logarithmique, aucun nombre n'est commensurable avec l'unité. Il y a donc lieu de *déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre donné* a *ait un logarithme commensurable.*

Supposons que le nombre a ait un logarithme commensurable $\frac{p}{q}$ (p et q étant des entiers); nous venons de dire (n° 489) que b étant la base du système, on a :

$$\log a = \frac{p}{q},\ \text{d'où}\ q.\log a = p$$

Mais

$$p = \log b^p\ ,\ \text{et}\ q \cdot \log a = \log a^q$$

Donc

$$\log a^q = \log b^p\ ,$$

Mais (n° 487) un nombre donné ne peut avoir dans un système donné qu'un seul logarithme, donc

$$a^q = b^p.$$

D'après cette égalité a doit avoir les mêmes facteurs premiers que b. et réciproquement ; donc si A, B, C désignent ces facteurs, et (x, x'), (y, y'), (z, z') les degrés de chacun de ces facteurs pour a et b, on devra avoir

$$A^{x'q} B^{yq} C^{zq} = A^{x'p} B^{y'p} C^{z'p}$$

Ces deux produits de facteurs premiers ayant même valeur il faut que

$$x q = x'p \text{ , d'où } \frac{x}{x'} = \frac{p}{q}$$

$$y q = y'p \text{ , d'où } \frac{y}{y'} = \frac{p}{q}$$

$$z q = z'p \text{ , d'où } \frac{z}{z'} = \frac{p}{q}$$

Et enfin

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

On en conclut ce

Théorème III. *Un nombre* a *un logarithme commensurable dans un système à base* b, *lorsque* a *et* b *n'étant composés que des mêmes facteurs premiers, les exposants respectifs de ces facteurs ont les mêmes rapports*.

Les conditions imposées par cet énoncé sont *suffisantes*.

En effet si l'on a simultanément

$$a = A^{x} B^{y} C^{z} \quad , \quad b = A^{x'} B^{y'} C^{z'}$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

Il viendra par des élévations aux puissances :

$$a^{x'} = A^{xx'} B^{yx'} C^{zx'} \quad \text{et } b^{x} = A^{xx'} B^{xy'} C^{xz'}$$

Mais de la constance des rapports des exposants des mêmes facteurs premiers on déduit :

$$y x' = x y' \quad , \quad z x' = x z'$$

D'où

$$a^{x'} = b^{x} \text{ , et } \log (a^{x'}) = \log (b^{x})$$

Et encore

$$x' \log a = x \text{ , } \log a = \frac{x}{x'} \qquad (c.q.f.d.)$$

Remarquons qu'en désignant par r le rapport des exposants, on aurait

$$x' = r x \text{ , } y' = r y \text{ , } z' = r z.$$

D'où

$$a = b^{r}$$

Cette observation se rattache à la génération logarithmique exponentielle (n° 496).

491. Théorème iv. *Le plus grand de deux nombres a le plus grand logarithme.*

Démonstration. En effet ces deux nombres peuvent toujours être introduits en même temps dans la progression par l'insertion d'un certain nombre de moyens factoriels (n° 488) ; de plus les progressions, qui constituent par leur *simultanéité* le système de logarithmes, sont croissantes.

Si les nombres considérés ne peuvent être introduits *qu'avec approximation* dans la progression, et que l'on désigne par d leur différence, on pourra toujours, en insérant des nombres de plus en plus grands de moyens, faire en sorte que la différence des nombres donnés soit plus grande que celle de deux termes consécutifs de l'insertion ; alors ces nombres N et N', par rapport à une certaine insertion continue de raison θ, donneront lieu à

$$N < \theta^{n} < N'$$

Par suite

$$\log N < \log \theta < \log N'$$

492. Théorème v. *La différence logarithmique est d'autant plus petite que les nombres diffèrent peu.*

Démonstration. Soient les deux nombres α^m et α^n, pour lesquels on a :

$$\log \alpha^n - \log \alpha^m = (n-m)\beta$$

Le produit $(n-m)\beta$, dont le facteur β est constant, diminuera donc à mesure que m s'approchera de n, c'est-à-dire lorsque les nombres donnés différeront de moins en moins.

Si les nombres donnés N et N' ne peuvent être assimilés à des puissances de α, la proposition sera toujours vraie, parce qu'elle est établie alors pour des puissances *limites* de α, entre lesquelles on peut comprendre chacun de ces nombres. En un mot c'est toujours le cas de l'incommensurabilité, traité d'une seule et même manière.

493. Théorème vi. *Les différences logarithmiques croissent moins rapidement que les différences entre les nombres.*

Démonstration. Soit le système logarithmique

$$\frac{1}{\alpha^n}, \dots \frac{\alpha}{\alpha^m}, \dots \frac{1}{\alpha}, 1, \alpha \dots . \alpha^m, \dots . \alpha^n$$

$$-n\beta, \dots -m\beta, \dots -\beta,\ 0,\ \beta, \dots .\ m\beta, \dots\quad n\beta$$

Considérons les deux termes consécutifs α^m et α^{m+1} qui donnent

$$\alpha^{m+1} - \alpha^m = \alpha^m(\alpha - 1)$$

$$(m+1)\beta - m\beta = \beta$$

Les différences logarithmiques croissent par *intervalles égaux à β*; quant à l'accroissement des nombres correspondants, il est le produit de deux facteurs dont l'un $\alpha - 1$ est constant pour tout le système, et dont l'autre α^m varie avec m; or m croissant indéfiniment α^m peut dépasser tout nombre possible. *c.q.f.d.*

494. Théorème vii. *Pour un accroissement numérique* déterminé, *la différence logarithmique converge vers* zéro, *lorsque le nombre* croît *indéfiniment.*

Considérons les deux différences numériques $\alpha^m(\alpha - 1)$ et $\alpha^n(\alpha - 1)$, et soit ϱ un nombre que l'on ajoute à α^m et α^n; en faisant une certaine insertion continue, dont nous désignons la raison par α', on formera les nombres $\alpha^m - \varrho$ et $\alpha^n + \varrho$ par des puissances convenables de degrés θ et θ' de la raison nouvelle; on aura ainsi,

$$\alpha^m + \varrho = \alpha^m \cdot \alpha'^{\,\theta}$$
$$\alpha^n + \varrho = \alpha^n \cdot \alpha'^{\,\theta'}$$

D'où par division,

$$\frac{\alpha'^{\,\theta}}{\alpha'^{\,\theta'}} = \frac{\alpha^m + \varrho}{\alpha^n + \varrho} \cdot \frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \frac{1 + \dfrac{\varrho}{\alpha^m}}{1 + \dfrac{\varrho}{\alpha^n}}$$

Mais $m < n$; donc $\alpha^m < \alpha^n$, et par suite

$$\frac{\varrho}{\alpha^m} > \frac{\varrho}{\alpha^n}$$

On voit donc que

$$\frac{\alpha'^{\,\theta}}{\alpha'^{\,\theta'}} > 1, \quad \text{d'où} \quad \theta > \theta'$$

Si β' est la raison d'insertion continue différentielle, $\theta\beta'$ et $\theta'\beta'$ sont les différences logarithmiques qui étant ajoutées à $log\ \alpha^m$ et $log\ \alpha^n$ donnent respectivement $log\ (\alpha^m + \varrho)$ et $log\ (\alpha^n + \varrho)$.

Or $\theta\beta' > \theta'\beta'$; donc la différence logarithmique diminue indéfiniment et converge vers zéro, lorsque le nombre correspondant augmente.

495. Nous avons, dans ce qui précède, choisi des progressions dont les deux termes correspondants sont 1 et 0;

relativement à cette correspondance particulière numérique établissons le

Théorème viii. *Lorsque deux progressions l'une par quotient* Q, *l'autre par différence* D, *ayant respectivement pour premiers termes* δ *et* Δ, *sont telles : 1° que le produit de deux termes de* Q *soit un des termes de cette progression, 2° que la somme des termes correspondants de* D *soit aussi un terme de cette progression, et que cette somme corresponde au produit considéré dans* Q; δ *est égal à* 1 *et* Δ *est égal à zéro.*

Démonstration. Soient A et B deux termes de Q, et a, b les termes de même rang de D ; k étant un nombre entier, on a par les conditions de la question, et d'après les lois de génération des progressions,

$$\left.\begin{aligned} AB &= \delta \cdot \alpha^k \\ a + b &= \Delta + k\beta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Mais on a aussi en général

$$\left.\begin{aligned} A &= \delta \cdot \alpha^m \\ B &= \delta \cdot \alpha^n \end{aligned}\right\} \text{ d'où } AB = \delta^2 \alpha^{m+n} \qquad (2)$$

et

$$\left.\begin{aligned} a &= \Delta + m\beta \\ b &= \Delta + n\beta \end{aligned}\right\} \text{ d'où } a + b = 2\Delta + (m+n)\beta \qquad (3)$$

La combinaison des égalités (1), (2) et (3) donne aisément

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \alpha^{k-(m+n)} \\ \Delta &= [k-(m+n)]\beta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Deux cas pourront seulement se présenter dans les égalités (4) : 1° On peut avoir $k = m + n$, d'où l'on déduit

$$\delta = 1 \quad , \quad \Delta = 0$$

2° Si k n'est pas égal à $m+n$, soit θ la différence,

$$k - (m+n) = \theta$$

Les égalités (4) fourniront

$$\delta = \alpha^{\theta}$$
$$\Delta = \theta\beta$$

Et sous cette forme on voit que, θ indiquant le rang à partir de certains termes correspondants δ' et Δ' de Q et D, si l'on voulait obtenir ces nouveaux termes δ' et Δ', il faudrait poser $\theta = 0$, ce qui fait rentrer ce cas dans le premier.

(*c.q.f.d.*)

496. Théorème ix. *Le logarithme d'un nombre est le degré de la puissance de la base du système, égale au nombre donné.*

Démonstration. Soit le système

$$\div\div\ 1\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha^2\ ,\ \alpha^3\ ,\qquad \alpha^n$$
$$\div\ 0\ ,\ \beta\ ,\ 2\beta\ ,\ 3\beta\ ,\qquad n\beta$$

La base d'un système étant le nombre qui a 1 pour logarithme, supposons que

$$b = \alpha^n$$

Et par suite puisque $log\ b = 1$,

$$n\beta = 1,\quad \text{d'où}\quad n = \frac{1}{\beta}$$

On en déduit

$$b = \alpha^{\frac{1}{\beta}}$$

Elevant à la β^e puissance, on aura

$$b^{\beta} = \alpha$$

Le système proposé deviendra

$$b^0\ ,\ b^{\beta}\ ,\ b^{2\beta}\ ,\ b^{3\beta}\ ,\qquad b^{n\beta}$$
$$0\ ,\ \beta\ ,\ 2\beta\ ,\ 3\beta\ ,\qquad n\beta\ (c.q.f.d.)$$

Précédemment nous avons fait voir que la progression par quotient représentait tous les nombres ; il est donc évident qu'il en est de même pour la transformée que nous venons d'obtenir.

Lorsque l'on considère tous les nombres comme produits par les diverses puissances d'un nombre constant, les degrés de ces puissances prennent le nom de *logarithmes*.

Il y a donc identité complète entre les logarithmes considérés comme termes d'une progression, et que l'on appelle quelquefois *logarithmes arithmétiques*, et ceux engendrés par la voie exponentielle et qui sont par opposition, désignés sous le nom de *logarithmes algébriques* ; en algèbre on pourra comprendre pourquoi une pareille qualification a pu être appliquée sans nécessité du reste.

Remarque. *Le logarithme d'un nombre ne peut être commensurable qu'autant qu'il est une puissance d'un degré commensurable de la base.*

En effet soit x le logarithme d'un nombre a, on devra avoir

$$a = b^x$$

Et dès lors vérité est évidente.

Propriétés fondamentales des logarithmes.

Théorème x. *Le logarithme du produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

Démonstration. (*) Soit le produit $a \cdot b$ dont nous considérons les facteurs comme étant des termes de la progression Q de notre système logarithmique ; considérons de plus un autre terme c éloigné de b du même nombre de termes que a l'est de 1 ; il s'en suit évidemment que les termes a et b seront équidistants des termes 1 et c, soit que 1 et c, ou que a et b remplissent les fonctions d'extrêmes.

(*) Cette bonne démonstration appartient, croyons-nous, à M. Lecointe, professeur à l'Athénée royal de Namur.



Le produit des extrêmes étant égal à celui des termes également éloignés des extrêmes, on aura

$$1 \times c = a \times b, \quad \text{d'où} \quad c = a\,b$$

Mais nous savons aussi que dans toute progression D par différence la somme des extrêmes est égale à la somme des termes équidistants des extrêmes; donc (remarque n° 460),

$$\log 1 + \log c = \log a + \log b, \quad \text{ou} \quad \log c = \log a + \log b$$

Et puisque $c = a\,b$, on a

$$\log a\,b = \log a + \log b \qquad (c.q.f.d.)$$

498. Corollaire i. *Le logarithme du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

Supposons que cette loi soit vraie pour le produit

$$P = a\,b\,c\,....\,p$$

composé de n facteurs, et démontrons qu'elle existe encore après l'introduction d'un nouveau facteur q, pour lequel

$$P' = a\,b\,c....\quad p\,q$$

Si dans ce produit P' de $n + 1$ facteurs, nous remplaçons $p\,q$ par sa valeur p', on aura le produit de n facteurs

$$P' = a\,b\,c...\quad p'$$

A ce dernier produit appliquant la propriété que l'on a supposée vraie pour n facteurs, il viendra

$$\log P' = \log a + \log b + \log c + ... \quad + \log p'$$

Or

$$\log p' = \log p\,q = \log p + \log q$$

Donc

$$\log P' = \log a + \log b + \log c + ... \quad + \log p + \log q$$

Cette égalité prouve que la loi annoncée, admise pour un nombre quelconque n de facteurs, est également vraie pour

$n + 1$ facteurs : or cette loi a été *démontrée* pour $n = 2$, donc elle est vraie pour $n = 3$, ensuite et de même pour $n = 4, 5, 6$, etc.

499. Corollaire ii. *Le logarithme d'un quotient est égal à l'excès du logarithme du dividende sur le logarithme du diviseur.*

Soit le quotient $\frac{A}{B}$ que l'on peut représenter par q, et mettre sous la forme,

$$q = \frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$$

D'où

$$\log q = \log \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) = \log A + \log \frac{1}{B}$$

Or (nº 486), on a vu que

$$\log \frac{1}{B} = -\log B$$

Donc

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

500. Corollaire iii. *Le logarithme d'une puissance est égal au produit du degré de la puissance par le logarithme de sa base.*

Si l'on décompose la puissance a^n en facteurs égaux à la base a de cette puissance, et que l'on fasse pour le produit résultant la somme des logarithmes des facteurs, on aura

$$\log a^n = \log a + \log a + \quad ....$$

ou

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

501. Corollaire iv. *Le logarithme de la racine d'un nombre est égal au quotient du logarithme du nombre par l'indice de la racine.*

Soit x la racine n^e de a, d'où :

$$x^n = a$$

En prenant les logarithmes des deux nombres, il viendra (n° 500),

$$n \,.\, \log x = \log a$$

Ce qui donne

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$$

—

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE LOGARITHMES.

502. Les divers systèmes de logarithmes proviennent des valeurs différentes que l'on donne à β, ou ce qui est la même chose, de la base b du système. Considérons les deux systèmes

Q	$\frac{1}{\alpha^n}$ …. , $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha}$ 1 , α , α^2…. α^n
D	$-n\beta$ …. , -2β, $-\beta$, 0 , β , 2β…. $n\beta$
D'	$-n\gamma$ …. , -2γ, $-\gamma$, 0 , γ , 2γ…. $n\gamma$

Et remarquons que dans chacun *l'exposant de la raison factorielle est égal au coefficient de la raison différentielle*, ce coefficient étant positif ou négatif selon que le nombre considéré dans Q est plus grand ou plus petit que 1.

Il en résulte que, la progression Q restant la même, les logarithmes différents figurant dans D et D' auront les mêmes coefficients pour β et γ; donc si A et B désignent deux nombres quelconques, et que l'on ait

$$\log A = p\beta \quad , \quad \log B = q\beta$$

On aura encore dans le système Q D', dont les logarithmes sont notés *log'*,

$$\log' A = p\gamma \quad , \quad \log' B = q\gamma$$

On voit donc que

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{\log' A}{\log' B}$$

Le rapport $\frac{\log A}{\log B}$ est donc constant; et l'on peut dire

Théorème xi. *Le rapport des logarithmes de deux nombres est constant, quelle que soit la base du système.*

503. Corollaire i. *Les logarithmes des nombres, dans un système quelconque, s'obtiennent en multipliant par un nombre constant les logarithmes pris dans un autre système.*

On vient de démontrer que

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{\log' A}{\log' B}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log' A}{\log A} = \frac{\log' B}{\log B}$$

Ce qui prouve que le rapport des logarithmes d'un même nombre dans deux systèmes quelconques est une quantité constante; représentons ce rapport par ϱ, et l'on aura

$$\log' A = \varrho \cdot \log A \qquad (c.q.f.d.)$$

504. Corollaire ii. *Le nombre ϱ que l'on appelle* module, *est l'inverse du logarithme de la nouvelle base, pris dans l'ancien système.*

Pour déterminer le nombre ϱ, si b' est la nouvelle base, la loi précédente donne

$$\varrho = \frac{\log' b'}{\log b'}$$

Mais $\log' b' = 1$, donc

$$\varrho = \frac{1}{\log b'}$$

D'où l'on voit que l'on peut encore dire, et sous forme de *règle*, en modifiant un peu l'énoncé du corollaire précédent :

Pour passer du logarithme log *au logarithme* log' *il faut multiplier le premier par l'inverse du logarithme de la nouvelle base, pris dans l'ancien système.*

505. Remarque. Les propriétés qui précèdent ont été établies dans l'hypothèse où les nombres proposés font partie

de la progression géométrique; lorsqu'il n'en est pas ainsi, nous avons déjà dit quel sens et quelle extension doivent être donnés aux principes.

Ces mêmes propriétés montrent qu'une multiplication peut être remplacée par l'addition de deux logarithmes; une division par la soustraction de deux logarithmes, et enfin l'extraction d'une racine d'ordre quelconque par la division du logarithme du nombre par l'indice de la racine : les logarithmes seront donc d'une grande utilité pour la formation d'un produit, d'un quotient, pour l'élévation à une puissance, ou pour l'extraction des racines.

506. Proposons-nous le problème suivant destiné à la construction d'une table composée de deux colonnes dont la première contiendrait tous les termes de Q, et la seconde, tous les termes correspondants de D.

PROBLÈME. *Un nombre* N *étant donné, en trouver le logarithme.*

Nous restreindrons ce problème *au cas des nombres premiers*, attendu que dans le cas contraire le logarithme de N est la somme des logarithmes des facteurs premiers dans lesquels N peut être décomposé.

On forme d'abord la table des puissances successives de la base *b* du système, et l'on cherche entre quelles puissances de α le *nombre premier* N est compris. Supposons que l'on ait ainsi

$$\alpha^m < N < \alpha^{m+1}$$

Il s'en suit

$$m\beta < \log N < (m+1)\beta$$

$m\beta$ sera donc le logarithme par défaut de N; cette approximation étant généralement insuffisante, on insère un même nombre de moyens factoriels entre α^m et α^{m+1}, et de moyens différentiels entre $m\beta$ et $(m+1)\beta$. On parvient ainsi à resserrer rapidement les limites entre lesquelles se trouve *tou-*

jours compris le nombre premier N, puisque les seuls nombres dont les logarithmes sont commensurables, sont (n° 496) les puissances de la base ; on arrivera à calculer log N à une approximation aussi grande que l'on voudra.

Cette méthode qui entâche le calcul d'erreurs nombreuses, devient impraticable lorsque N est un grand nombre ; nous ne l'avons exposée avec *concision*, que pour laisser *concevoir* la construction d'une table de logarithmes : la théorie et les formules qui président à la formation de cette table ne sont pas du ressort de l'Arithmétique.

—

CHAPITRE III.

TABLES DE LOGARITHMES DE BRIGGS. — CALCUL LOGARITHMIQUE.

Logarithmes vulgaires ou de Briggs. — Détermination, à priori, de la caractéristique. — Identité des mantisses lorsque les nombres ne diffèrent factoriellement que par une puissance de 10.—Tables vulgaires. — Disposition et usage des tables de F. C. Marie; problèmes auxquels donne lieu l'emploi de ces tables; parties proportionnelles. — Disposition et usage des grandes tables de F.Callet; problèmes correspondants à l'emploi de ces tables. — Approximation dans le calcul d'un logarithme. — Valeur et influence du principe hypothétique et faux des parties proportionnelles. — Précautions indispensables à prendre dans l'emploi des tables de Marie. — Les tables de Callet doivent être préférées, aux points de vue de la promptitude et de l'exactitude des calculs. — Logarithmes à caractéristiques négatives; addition, soustraction, multiplication et division de ces logarithmes. — Co-logarithmes et compléments logarithmiques; corrections à faire par suite de leur emploi. — Type général de calcul de logarithmes par les deux méthodes des caractéristiques négatives, et co-logarithmique-complémentaire.

307. On nomme logarithmes de *Briggs* ou logarithmes *vulgaires*, ceux dont la base est 10; ils sont définis par les deux progressions

$$1\ ,\ 10\ ,\ 100\ ,\ 1000\ ,\ 10000\ ,\ \ldots.$$
$$0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \ldots.$$

En effet b étant la base générale, on a établi (n° 489) que

$$\log b^n = n$$

Le système de Briggs est le seul dont on fait usage dans les applications numériques.

Lorsque la partie entière d'un nombre N a k chiffres, ce nombre est tel que

$$10^{k-1} < \quad N \quad < 10^k$$

Donc

$$k - 1 < \log N \ < \ k$$

$k - 1$ est, comme on voit, la partie entière du logarithme vulgaire du nombre N ; cette partie entière prend le nom de *caractéristique* du logarithme. Ainsi

THÉORÈME I. *La caractéristique logarithmique a autant d'unités* MOINS UNE *qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre correspondant à ce logarithme.*

Si c est cette caractéristique et f le nombre de chiffres de N, on a donc

$$c = f - 1, \quad \text{d'où} \quad f = c + 1$$

C'est-à-dire que *le nombre de chiffres de* N *est supérieur de* 1 *à la caractéristique du logarithme de* N.

508. THÉORÈME II. *Lorsque deux nombres, composés des mêmes chiffres placés dans le même ordre, diffèrent par le rang de la virgule, leurs logarithmes ont même partie décimale.*

Démonstration. Lorsque deux nombres N et N' remplissent ces conditions,

$$N = N' \cdot 10^i$$

(i étant un nombre entier convenable). On en déduit

$$\log N = \log N' + \log 10^i = \log N' + i$$

Or i s'ajoutant à la caractéristique de *log* N', il s'en suit que les parties fractionnaires de *log* N et *log* N' sont identiques.

On en conclut que, connaissant le logarithme d'un nombre N, on peut immédiatement trouver le logarithme d'un nombre N′ qui ne diffère de N que par le rang de la virgule : cette observation est d'une indispensable nécessité dans le calcul des logarithmes.

509. Corollaire i. *En déplaçant de* n *rangs la virgule dans un nombre décimal, on augmente ou l'on diminue la caractéristique de* n *unités selon que ce déplacement a lieu vers la droite ou vers la gauche.* (La partie décimale logarithmique reste la même.)

510. Corollaire ii. *L'addition ou la soustraction de* n *unités à la caractéristique implique la multiplication ou la division du nombre par* 10^n.

—

DISPOSITION ET USAGE DES TABLES VULGAIRES.

511. Nous avons déjà laissé comprendre (nº 506), qu'une table de logarithmes est un tableau à deux colonnes verticales : dans la première se trouve la suite naturelle des nombres jusqu'à une certaine limite, et à côté dans la seconde, leurs logarithmes. On a publié un grand nombre de tables de logarithmes depuis celles de *Briggs* et de *Vlacq* qui ont servi de base à la plupart des tables modernes.

Les tables les plus répandues sont celles de Callet; elles donnent, avec 7 décimales exactes, les logarithmes des 108000 premiers nombres entiers.

Mais on se sert beaucoup aussi de tables contenant seulement les logarithmes à 7 décimales des 10000 premiers nombres entiers; ces tables sont celles de l'abbé *Marie.*

Pour nous conformer aux habitudes de l'Enseignement, nous donnerons aussi l'usage des petites tables de *Marie,* en conseillant *fortement* et de préférence, l'emploi des grandes de

Callet, dont nous établirons les nombreux avantages quant à la précision et à la rapidité du calcul.

A l'exemple des auteurs allemands et de plusieurs auteurs français, nous emploierons la dénomination abrégée de *Mantisse* pour désigner la partie d'un logarithme à droite de la virgule.

Disposition et usage des tables de F. C. Marie.

512. La première colonne intitulée *Nomb* est, ainsi que la seconde marquée *Logarith*, brisée en trois parties sur chaque page; une troisième colonne renferme les différences logarithmiques consécutives, ou *différences tabulaires;* cette troisième colonne porte la lettre D comme notation. Chacune des trois colonnes à trois subdivisions que contient chaque page, renferme les logarithmes de 30 nombres entiers consécutifs; la colonne *Nomb* commence et finit dans chaque compartiment par un multiple de 30.

Nous avons prouvé (nº 494) que pour un accroissement déterminé (*égal à* 1 par exemple), la différence logarithmique converge zéro lorsque le nombre croît indéfiniment; or on a remarqué que cette différence ne se compose en général que de *trois* ou *quatre* chiffres décimaux, et qu'il serait dès lors inutile d'en écrire les chiffres de gauche qui sont des *zéros, si l'on admet que l'unité de la colonne* D *est* $\frac{1}{10^7}$: c'est de cette manière que la forme fractionnaire a disparu de D.

Pour les 1000 premiers nombres entiers les différences tabulaires sont composées de 5 à 6 chiffres; dès lors dans le but de diminuer le cadre et l'épaisseur du volume, on en a *supprimé* l'inscription à la colonne D : du reste et comme nous le verrons, ces différences seraient inutiles pour ces nombres attendu que les procédés du calcul logarithmique permettent et *prescrivent* même, de ne jamais employer les nombres

inférieurs à 1000. *Les tables ne contiennent pas* non plus *les logarithmes des nombres plus petits que* 1, parce que le calcul donne toujours, à l'aide de notations ou d'artifices, le moyen de ne pas faire usage de ces logarithmes qui sont négatifs.

513. Toute table donne lieu à deux problèmes que nous résoudrons d'abord par les tables de Marie.

PROBLÈME. 1. *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

On peut considérer les cas suivants :

$$N < 10000 \left\{ \begin{array}{l} \textit{entier.} \\ \textit{fractionnaire.} \end{array} \right.$$

$$N > 10000$$

1er CAS. Si le nombre entier N est moindre que 10000, on en trouvera le logarithme sans faire aucun calcul, puisque après avoir cherché N dans la colonne *Nomb* on trouve à côté son logarithme.

2e CAS. Soit par exemple $N = 8245,67$

Il est évident que l'on a :

$$\log 8245 < \log 8245,67 < \log 8246$$

En représentant donc par x l'excès du logarithme cherché sur le logarithme de sa partie entière, on voit que

$$\log 8245,67 = \log 8245 + x$$

ou

$$\log 8245,67 = 3,9161907 + x$$

Il s'agit de calculer x; la différence tabulaire est 526.

Pour cela *on* ADMET *que les différences tabulaires ont le même rapport que les différences entre les nombres correspondants ;* or cette hypothèse est complètement fausse, puisqu'elle entraînerait l'invariabilité de la différence de deux termes consécutifs de la progression par quotient : mais l'erreur qui en résulte n'a pas d'influence sur les premiers chif-

fres du logarithme, dont on peut même être certain de l'exactitude des sept premières décimales, lorsque l'on opère avec CERTAINES *précautions.*

Nous reviendrons *avec détail* sur ce point *très-important*, et passé sous silence par *tous* les auteurs, et nous ferons voir sur quelle approximation on peut compter en adoptant le *principe faux* de l'égalité des rapports entre les différences logarithmiques et numériques. —

On aura donc ici

$$\frac{1}{526} = \frac{0,67}{x}, \quad \text{d'où} \quad x = 526 \cdot 0,67 = 352,42$$

Et enfin,

$$\log 8245,67 = 3,9161907 + 0,0000352 = 3,9162259$$

On formule donc cette règle :

Pour déterminer la différence logarithmique additionnelle multipliez la différence tabulaire par la partie décimale du nombre proposé; ayez soin de forcer de 1 le 7ᵉ chiffre décimal, si le 8ᵉ est au moins égal à 5.

3ᵉ CAS. Pour $N > 10000$, soit $N = 824567$.

En faisant application de la propriété (nº 508), nous imaginerons un autre nombre, *ayant 4 chiffres à la partie entière*, et tel que

$$824567 = 8245,67 \times 100$$

D'où

$$\log 824567 = 2 + \log 8245,67$$

En ayant à opérer sur un nombre décimal moindre que 10000 nous sommes ramenés au cas précédent, d'où

$$\log 824567 = 5,9162259$$

Il est du reste *très-utile* de remarquer que ce changement de rang de la virgule n'est pas nécessaire pour le calcul : en effet *par la pensée réduisez à 4 chiffres la partie entière et*

cherchez la partie DÉCIMALE *du logarithme correspondant; la caractéristique sera d'une unité moindre que le nombre de chiffres de la partie entière proposée.*

514. PROBLÈME II. *Trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné.*

1° Supposons

$$\log N = 1{,}9162259$$

On rétablit 3 à la caractéristique :

$$1{,}9162259 = 3{,}9162259 - 2$$

D'après le principe (nº 508) il suffira de chercher le nombre dont 3,9162259 est le logarithme, puis d'avancer la virgule de 2 rangs vers la gauche dans le nombre ainsi trouvé.

On sera toujours conduit à opérer sur un logarithme dont 3 est la caractéristique, et les tables fourniront le logarithme immédiatement inférieur à un tel logarithme; on a ainsi dans le cas qui nous occupe,

$$\left.\begin{array}{r} 3{,}9162259 \\ \log 8245 = 3{,}9161907 \end{array}\right\} \text{Diff.} = 352$$

Recourant à la même hypothèse que dans le problème précédent, on obtient

$$\frac{1}{526} = \frac{x}{352}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{352}{526}$$

La partie x fractionnaire *est* donc *le quotient par la différence tabulaire de l'excès du logarithme donné sur celui qui lui est immédiatement inférieur.*

On aura ainsi $N = 8245{,}67$.

2° Si l'on donnait

$$\log N' = 4{,}9162259$$

Après avoir réduit la caractéristique à 3, on trouverait que 8245,67 est le nombre correspondant à 3,9162259; il

resterait à reculer la virgule de 1 rang vers la droite, pour donner

$$N' = 82456,7$$

515. Remarque. Lorsque l'on cherche un logarithme, on opère toujours sur un nombre ayant 4 chiffres à la partie entière ; et lorsque l'on cherche le nombre correspondant à un logarithme donné, on rend préalablement la caractéristique égale à 3.

En suivant cette méthode de calcul on peut compter sur sept *chiffres décimaux exacts.* (n° 519)

Disposition et usage des tables de F. Callet.

516. Disons avant tout que, dans le but de gagner le plus d'espace possible, ces tables ne donnent pas les caractéristiques qui se déduisent immédiatement du nombre de chiffres de la partie entière du nombre.

Les tables de Callet sont de deux espèces : la première, qui ne contient que les logarithmes des 1200 premiers nombres entiers, a la même disposition que les tables de Marie ; cette table I est nommée *Chiliade I*, parce qu'elle contient les logarithmes du premier mille (*).

Les tables de la seconde espèce parcourent l'intervalle de 1020 à 108000 et sont disposées comme suit :

Une première colonne, intitulée N contient les nombres naturels depuis 1020 jusqu'à 10800. — La 2e colonne, marquée 0 offre les mantisses de ces nombres ; l'assemblage de ces deux colonnes forme la suite de la table I et donne immédiatement les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 10800.

(*) *Chiliade* est un mot grec francisé qui signifie collection de mille unités.



Si l'on observe la colonne O, on verra vers la gauche de cette colonne certains *nombres isolés de trois chiffres* chacun qui vont toujours en augmentant d'une unité, et qui ne sont pas à des distances tout à fait égales les uns des autres. Vers la droite de la même colonne sont des nombres de quatre chiffres chacun, qui pour constituer le logarithme du nombre entier, écrit dans N sur la même ligne, doivent être précédés à gauche du nombre isolé de trois chiffres le plus prochain en montant. — Au delà de 10000 les nombres isolés ont 4 figures, et par suite les logarithmes en ont *huit*.

Lorsque deux nombres ne diffèrent entr'eux que par le rang de la virgule décimale, leurs mantisses sont égales; donc l'assemblage des deux premières colonnes donnent de 10 en 10, les logarithmes des nombres compris entre 10200 et 108000.

Pour trouver les logarithmes des 9 nombres compris dans l'intervalle de chacune des dizaines ainsi considérées, il faut avoir recours aux colonnes marquées 1, 2, 3, 4, etc.... Ces colonnes contiennent les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres dont le chiffre de droite est en tête de ces colonnes. Ces colonnes présentent donc les quatre dernières décimales des mantisses de tous les nombres compris entre 1020 et 10800 et dont

0 est le chiffre de droite pour la colonne marquée 0
1 » » » » » 1
2 » » » » » 2

Et ainsi de suite jusqu'à neuf.

Les tables de Callet forment donc une table à double entrée dans laquelle on consulte d'abord la première colonne N ; et lorsqu'on y a trouvé les quatre premières figures du nombre dont on veut avoir le logarithme, on suit de l'œil la ligne horizontale sur laquelle il se trouve, jusqu'à ce que l'on

soit arrivé à la colonne au haut de laquelle se trouve le dernier chiffre du nombre donné ; alors on a sous les yeux les quatre derniers chiffres de la mantisse cherchée. Quant aux trois premiers ou aux quatre premiers, ils sont exprimés par le nombre isolé qui se trouve dans la seconde colonne le plus prochain en montant.

La dernière colonne contient les différences de deux logarithmes consécutifs et les parties de ces différences, c'est-à-dire les produits de ces mêmes différences par $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., jusqu'à $\frac{9}{10}$. Ces produits forment autant de petites tables qu'il y a de différences. Chacune de ces petites tables différentielles se trouve placée immédiatement au-dessous de la différence dont elle indique les parties.

Mais vers le commencement des tables ces différences ont trop de chiffres et se trouvent trop près les unes des autres pour permettre, en n'occupant qu'une seule colonne, de placer les petites tables des parties dans l'intervalle qui se serait trouvé entr'elles. C'est pourquoi on les a disposées d'abord sur deux colonnes : la première de ces différences occupe la première colonne ; les deux suivantes, sans sortir de l'horizontale où elles doivent être placées, sont repoussées à droite et occupent la seconde colonne ; les deux différences qui suivent se trouvent sur la première colonne et les deux suivantes sur la seconde, et ainsi de suite. Dans les quatre premières pages de la 2e table, on n'a placé les tables des parties de ces différences que de deux en deux.

517. Problème i. *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

1er cas. Si N est entier et plus petit que 1200, on en trouvera la mantisse sur la ligne horizontale de N, et dans la colonne intitulée *log* ; on rétablit ensuite la caractéristique.

Ainsi l'on a :

log 1018 = 3,00774778

2e CAS. *Si* N *est entier et compris entre* 1020 *et* 10800, on le cherchera dans la table qui vient après la *Chiliade I*, et l'ayant trouvé dans la colonne N, on consultera la colonne suivante marquée 0. Si l'on y voit 7 chiffres de front dans l'alignement du nombre naturel, on aura la *mantisse* par suite d'une seule lecture.— Exemple :

log 10666 = 4,02800158

Mais si l'on n'y trouve que quatre figures, elles donneront la partie de droite de la *mantisse*, ensuite on remarquera qu'il règne à leur gauche une marge ou espace blanc; on suivra cette marge en montant, et le premier nombre de trois ou de quatre chiffres qu'on y rencontrera sera la partie de gauche de la mantisse cherchée. — Exemple :

log 8423 = 3,9254668

3e CAS. *Si le nombre* N = 84237 *est entier et compris entre* 10200 *et* 108000, on fera pour un instant abstraction du chiffre de droite et l'on cherchera dans la colonne, notée N, le nombre 8423. On suivra,de l'œil,l'horizontale sur laquelle on l'aura trouvé pour s'arrêter dans la colonne dont l'en-tête est le cinquième chiffre 7, dont on avait d'abord fait abstraction. Les quatre chiffres 5029 que l'on trouve sur cette ligne dans cette colonne forment la partie de droite de la *mantisse*; quant à l'autre partie, plusieurs fois déjà nous en avons indiqué la lecture. Il viendra par suite,

log 84237 = 4,9255029

4e CAS. N *est entier et plus grand que* 108000.

En divisant alors N par une puissance convenable de 10, on pourra rentrer dans les limites des tables ; *on fera en sorte*

que le quotient N′ *obtenu ait* TOUJOURS 5 *chiffres à la partie entière.*

Soit $N = 84237473$; d'où $N' = 84237{,}473$

On raisonnera sur la partie décimale 0,473 comme on a raisonné sur la fraction 0,67 du 2ᵉ cas du nº 513, et l'on aura encore en désignant par x la différence logarithmique correspondante à 0,473 :

$$x = 52 \,.\, 0{,}473$$

Mais les tables de Callet donnent immédiatement dans la colonne *Diff* les trois produits partiels

$52 \times 0{,}4$	20,8	unités décimales du 7ᵉ ordre
$52 \times 0{,}07$	3,6	» » » »
$52 \times 0{,}003$ . . .	0,16	» » » »

$$x = 24{,}56$$

Et puisque le 8ᵉ chiffre décimal atteint 5, il y a lieu de forcer le chiffre précédent, ce qui donne

$$x = 25$$

Par suite

$$\log 84237473 = 7{,}9255054$$

518. PROBLÈME II. *Trouver le nombre auquel appartient un logarithme donné.*

1ᵉʳ CAS. Si le logarithme est un de ceux de la première chiliade, on lira en regard à gauche le nombre N correspondant.

2ᵉ CAS. Si le logarithme ne se trouve pas dans la première table, on cherchera d'abord la partie de trois chiffres à gauche de la mantisse ; ensuite on cherchera la mantisse parmi toutes celles qui dans les 10 colonnes verticales se trouvent correspondre à la même première partie ; si l'on y trouve les quatre dernières figures du logarithme, on verra le nombre cherché dans la colonne N sur leur alignement horizontal et vertical.

Exemple :

$$1,9673467 = \log 92,757$$

En second lieu, supposons

$$1,9674432 = \log x$$

Dans ce cas, la partie 4432 n'est pas l'une de celles qui correspondent à 967 :

Arrêtons-nous alors à la partie 4403 immédiatement inférieure à 4432. Nous dirons encore, en raisonnant comme au premier cas du n° 514,

$$\frac{1}{47} = \frac{x}{4432-4403} = \frac{x}{29}$$

x étant la partie décimale à ajouter au nombre 92777 dont le logarithme a pour *mantisse*

9674403

On trouve

$$x = \frac{29}{47} \text{ (Même règle que 1}^{\text{er}}\text{ cas 514)}$$

$$x = 0,61702127...$$

Et

$$N = 92,77761702127...$$

—

APPROXIMATION DANS LE CALCUL D'UN LOGARITHME.

519. Par des théories, qui ne sont pas du ressort de l'Arithmétique, on démontre que, dans la construction d'une table de logarithmes, l'erreur que l'on commet *forcément* est moindre qu'une unité décimale du 12e ordre.

Pour trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire, on pose :

Différence logarithmique = différence tabulaire × fraction du nombre donné.

Ce principe faux entâche donc le calcul d'une erreur dont il importe d'apprécier la valeur et l'influence. Cette recherche est l'objet du théorème suivant, de M. *Vincent :*

THÉORÈME III. *L'erreur qui résulte de l'admission de ce principe est moindre que l'inverse de* 16 *fois le carré du nombre* N *dont on demande le logarithme.*

Démonstration. Soient N la partie entière du nombre, et d la partie fractionnaire; de plus soient

$$\delta = \log(N+1) - \log N = \text{diff. tab.}$$

$$x = \log(N+d) - \log N = \text{diff. log.}$$

L'erreur que l'on commet provient donc de l'hypothèse

$$x = d\,\delta$$

Puisque le logarithme d'un quotient est égal à l'excès du logarithme du dividende sur le logarithme du diviseur, on aura

$$\delta = \log\frac{N+1}{N} = \log\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

$$x = \log\frac{N+d}{N} = \log\left(1+\frac{d}{N}\right)$$

Soit ε l'erreur, qui aura pour expression

$$\varepsilon = \log\left(1+\frac{d}{N}\right) - d\,\delta$$

ou, après substitution et logarithmes de puissance,

$$\varepsilon = \log\left(1+\frac{d}{N}\right) - d\,.\log\left(1+\frac{1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{d}{N}\right) - \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^{d} \qquad (1)$$

En désignant par

$$1\ ,\ 1+\rho\ ,\ (1+\rho)^2\ ,\ (1+\rho)^3\ \ldots\ (1+\rho)^n$$

la progression par quotient fournissant la suite des nombres,

et en représentant par M le module, on a pour progression logarithmique correspondante

$$0\ ,\ M\rho\ ,\ 2M\rho\ ,\ 3M\rho...,\ nM\rho$$

La différence Δ entre deux termes quelconques consécutifs de la première progression est

$$\Delta = (1+\rho)^{n+1} - (1+\rho)^{n} = (1+\rho)^{n} \cdot \rho$$

D'où l'on voit que $\Delta > \rho$, tandis que la différence entre deux termes quelconques consécutifs de la seconde est égale à ρ. Donc si N et N' représentent deux nombres quelconques, tels que N' soit le n^{e} après N, on aura

$$N' - N > n\rho$$

$$nM\rho = \log N' - \log N$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$M(N' - N) > \log N' - \log N$$

Ce qui montre que *pour avoir une limite supérieure de la différence de deux logarithmes il faut multiplier par le module la limite de l'excès des nombres correspondants.*

Cherchons donc une limite des nombres dont les logarithmes forment le second membre de l'expression (1).

La formule du binome de Newton, pour un exposant quelconque (*), nous donne

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{d} = 1 + \frac{d}{N} + \frac{d(d-1)}{1.2.N^{2}} + ...$$

d étant plus petit que 1, $d-1$, $d-2$, $d-3$..., sont négatifs; on conclut de là facilement que la différence entre

(*) Voir mes *Nouvelles démonstrations de la formule du Binome de Newton*; H. Dessain, septembre 1854.



$\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$ et $1+\frac{d}{N}$ a pour limite $\frac{d\,(d-1)}{2\,N^2}$, ou plutôt

$$\frac{d\,(1-d)}{2\,N^2}=d\,(1-d)\,\frac{1}{2\,N^2}$$

Le produit $d\,(1-d)$ étant le plus grand quand chacun des facteurs est la moitié de leur somme 1, on aura

$$\text{limite}\left[\left(1+\frac{d}{N}\right)-\left(1+\frac{1}{N}\right)^d\right]=\frac{1}{8\,N^2}$$

Pour passer à la limite de ε il suffit de multiplier par M, et il vient :

$$\text{limite } \varepsilon=\frac{M}{8\,N^2}.$$

Or pour le système vulgaire, on a $M = 0{,}434294481\ldots$; d'où puisque $M < \frac{1}{2}$, on peut poser

$$l = \text{lim. } \varepsilon = \frac{1}{16\,N^2} \qquad (c.q.f.d.)$$

La limite $\frac{1}{16\,N^2}$ décroît indéfiniment quand N augmente.

529. Par rapport au calcul du logarithme d'un nombre fractionnaire, résolvons actuellement cette question :

Quel nombre de chiffres doit-on prendre pour la partie entière, afin que l'erreur ne puisse atteindre une unité du 5ᵉ, du 6ᵉ ou du 7ᵉ ordre décimal.

1° Supposons que l'on donne *cinq* chiffres à cette partie entière. et l'on aura

$$N > 10000$$

Donc la limite $\frac{1}{16\,N^2}$ peut être remplacée par $\frac{1}{16.10^8}$, ou par 0,000000000625; on en déduit que *l'erreur commise en employant les tables de Callet pour trouver le logarithme d'un*

nombre ayant plus de 5 chiffres n'affecte pas la 7e décimale. et qu'elle ne pourrait influer que sur la 10e.

2° Si l'on donne *quatre* chiffres à la partie entière, alors

$$N > 1000$$

Et la limite générale $\frac{1}{16\,N^2}$ peut être remplacée par $\frac{1}{16.10^6}$ ou par 0,0000000625 ; on voit donc que *l'erreur commise par les tables de Marie, en cherchant le logarithme d'un nombre ayant plus de quatre chiffres peut quelquefois affecter la 7e décimale.*

530. Comme ce dernier point est très-important dans un pays comme le nôtre, où les habitudes maintiennent encore malheureusement l'usage *trop général* des tables de Marie, nous allons examiner de plus près le degré de confiance à donner aux derniers chiffres des mantisses calculées pour des nombres de plus de 4 chiffres.

Au lieu de $\frac{1}{16\,N^2}$ reprenons, comme moins éloignée, la limite $\frac{M}{16\,N^2}$; on aura

$$\text{limite } \varepsilon = \frac{0{,}434294481\ldots\ldots}{8\,.\,N^2}$$

Si successivement l'on pose limite $\varepsilon = \frac{1}{10^8}, \frac{1}{10^7}$, on trouvera que

à partir de $N = 2329$, la 8e décimale est exacte.

» » $N = 736$, » 7e » » »

Donc avec les tables de *Marie*, pour être certain que l'erreur ne peut atteindre la 7e décimale, il faut opérer sur une partie entière *au moins* égale à 736, ou ayant en général *quatre* chiffres.

Les tables de *Callet* donnent donc exactement les 7ᵉ, 8ᵉ, 9ᵉ décimales de la différence logarithmique d'un nombre supérieur à 10000, tandis que les tables de *Marie* n'assurent cette exactitude que pour le 7ᵉ chiffre décimal et relativement à des nombres inférieurs à 10000.

Or pour les puissances des nombres les erreurs logarithmiques sont multipliées par le degré de la puissance, et l'on voit que, dès que le degré est au-moins égal à 100, l'erreur pourra atteindre le 5ᵉ chiffre décimal, tandis que par les tables de Callet les huit premières décimales seraient encore exactes.

Par ce qui précède, nous croyons avoir *prouvé* que les tables de *Marie* ne sont guère comparables à celles de Callet sous le rapport de l'exactitude, et que par suite de leur peu d'étendue il est utile de les abandonner ou tout au moins de les réserver pour des calculs d'une approximation au plus égale à 0,0001.

—

LOGARITHMES A CARACTÉRISTIQUE NÉGATIVE.

531. Lorsque l'on doit chercher le logarithme d'une fraction proprement dite, après avoir retranché le logarithme du dénominateur du logarithme du numérateur, il est clair que le reste serait un nombre négatif : le calcul *évite* avec soin ces nombres négatifs.

Considérons un nombre plus petit que 10, et soit

$$\log 3,265 = 0,5138832$$

En vertu de la propriété (nº 509),

$$\log 0,000003265 = 0,5138832 - 6$$

Le nombre 6 est évidemment le rang du premier chiffre significatif décimal, et l'on a établi cette convention :

Au lieu d'effectuer cette soustraction, remplacez la caractéristique 0 *par le rang* 6 *et surmontez-la du signe* — *(moins).* Ainsi

$$\log 0{,}000003264 = \bar{6}\,,5138832$$

Ce nouveau logarithme a donc pour caractéristique négative le rang du premier chiffre significatif décimal; sa mantisse est celle du logarithme de la fraction considérée comme entière.

De cette règle résulte immédiatement que pour retourner du logarithme $\bar{6},5138832$, au nombre correspondant il faudra chercher la fraction x considérée comme entière : pour cela il suffira de déterminer le nombre 3265 appartenant à 3,5138832 ; puis en écrivant ce dernier nombre de manière que le chiffre 3 soit le 6e chiffre décimal, on obtient

$$x = 0{,}000003265$$

Jetons un coup d'œil sur les opérations fondamentales relatives à ces nouveaux logarithmes.

532. *Addition.* On écrit les logarithmes les uns en dessous des autres en colonnes verticales. Ainsi soit

$$\begin{array}{l} \bar{4}\,,5138832 \\ \bar{2}\,,6782943 \\ 3\,,2548021 \end{array}$$

Il est évident que cette opération revient à la suivante

$$\begin{array}{ll} 0\,,5138832 & -\ 4 \\ 0\,,6782943 & -\ 2 \\ 3\,,2548021 & +\ 3 \end{array}$$

Sous cette forme *il est clair que l'on devra additionner* 1° *les parties décimales;* 2° *faire la somme des caractéristiques négatives ;* 3° *faire la somme des caractéristiques positives ;* 4 *augmenter cette dernière somme du report de la colonne d*

dixièmes; 5° soustraire la plus petite de ces dernières sommes de la plus grande et donner au reste ainsi obtenu le signe de la plus grande.

On aura ainsi

$$1{,}4469796 + 3 - 6 = 0{,}4469796 + 4 - 6 = \overline{2}\,,4469796$$

533. *Soustraction.* Soit en général c la caractéristique (positive ou négative), et m la mantisse ; on peut écrire

$$c, m = c + 0, m$$

Ajoutons et soustrayons 1 au second membre, et il viendra

$$c, m = c + 1 - 1 + 0, m = (c + 1) - (1 - 0, m)$$

Si l'on doit soustraire ce logarithme nous aurons :

$$- c, m = - (c + 1) + (1 - 0, m)$$

La quantité $1 - 0, m$ est plus petite que 1, et l'on peut ainsi suivre cette règle :

La soustraction d'un logarithme s'opère par l'addition d'un autre logarithme, dont la mantisse est le complément à 1 de la partie décimale du logarithme à soustraire, et dont la caractéristique s'obtient en ajoutant 1 à la caractéristique donnée, et en prenant la somme en signe contraire.

Ainsi soit à soustraire $\overline{4}\,,5138832$.

D'après la règle on aura

$$-(-4+1),(1-0{,}5138832) = 3\,,4861168.$$

Soit aussi à soustraire $4\,,5138832$,

cela donnera lieu à

$$-(+4+1),(1-0{,}5138832) = \overline{5}\,,4861168.$$

534. *Multiplication.* L'opération correspondante à la formation d'une puissance consiste à multiplier le logarithme par le degré de la puissance, c'est-à-dire par un nombre entier. — D'après ce qui a été dit de l'addition, on voit que l'on

multipliera d'abord la mantisse; il en résultera un report que l'on soustraira du produit de la caractéristique. Exemple:

$$\bar{2},5138832.4 = (0,5138832 - 2)\,4 = 2,0555328 - 8$$

$$\bar{2},5138832.4 = \bar{6},0555328.$$

Division. L'extraction des racines correspond à la division du logarithme de la quantité sous radicale par l'indice de la racine à extraire.

Soit $\overline{16},5138832$ à diviser par 7.

Par l'addition de 5 unités à la caractéristique, considérée en valeur absolue, complétons le multiple du diviseur 7 immédiatement supérieur à cette caractéristique; et pour neutraliser cette erreur, écrivons

$$Q = \frac{\overline{21} + 5,5138832}{7}$$

Le logarithme *positif* qui figure au numérateur a pour caractéristique un nombre plus petit que le diviseur; en effectuant les deux divisions indiquées actuellement par cette dernière forme de Q, le quotient positif que l'on obtiendra aura toujours 0 pour caractéristique, et l'on aura ainsi

$$Q = \bar{3} + 0,7876976 = \bar{3},7876976$$

On peut donc poser en règle :

Pour diviser un logarithme à caractéristique négative par un nombre entier, ajoutez à la caractéristique autant d'unités qu'il en faut pour former le multiple du diviseur immédiatement supérieur à cette caractéristique; divisez ce multiple et vous aurez la caractéristique négative du quotient cherché; la mantisse sera le quotient obtenu en divisant par le diviseur le logarithme dont la caractéristique est l'augmentation faite sur la partie entière du dividende et dont la mantisse est celle qui est donnée.

CO-LOGARITHMES ET COMPLÉMENTS LOGARITHMIQUES.

535. Soit encore

$$\log 3{,}265 = 0{,}5138832$$

$$\log 0{,}000003265 = 0{,}5138832 - 6$$

Ajoutons 10 aux deux membres de cette égalité, et remarquons que l'addition de 10 à un logarihtme provient de la multiplication du nombre correspondant par 10^{10} ; de plus convenons d'appeler co-logarithme d'une fraction, le logarithme de cette fraction multipliée par 10^{10}, et il viendra :

$$\text{colog } 0{,}000003265 = 0{,}5138832 + (10-6) = (10-6),5138832$$

De là cette règle :

Un co-logarithme a pour caractéristique l'excès de 10 *sur le rang du premier chiffre significatif décimal; sa mantisse est la même que celle de la fraction proposée considérée comme un nombre entier.*

Désignant par r ce rang, et par α la caractéristique co-logarithmique, on a donc :

$$\alpha = 10 - r, \quad \text{et} \quad r = 10 - \alpha$$

Cette dernière égalité apprend que *le rang décimal du premier chiffre significatif est le complément à* 10 *de la caractéristique du co-logarithmique.*

Si l'on propose de trouver x sachant que

$$\text{colog } x = 4{,}5138832$$

On cherchera le nombre 3265 dont le logarithme est 3,5138832, et l'on placera la virgule décimale de manière que le chiffre 3 de gauche soit le 6ᵉ chiffre décimal ; cela donne

$$x = 0{,}000003265$$

Le passage à un *co-logarithme* entraîne la correction par soustraction de 10 hors du résultat.

536. Remarque. Si $r > 10$ a par exemple,

$$n \cdot 10 < r < (n+1)\, 10$$

On multiplierait la fraction proposée par 10^{n+1} ; alors le nombre trouvé est de $(n+1)$ dizaines trop grand dans le co-logarithme employé, et le rang R du premier chiffre décimal est dans ce cas :

$$R = n \cdot 10 + (10 - \alpha)$$

537. Soit la fraction ordinaire $\frac{A}{B}$ dans laquelle $A > B$, A et B étant plus grands que 1 ; x représentant la valeur de cette fraction, on a

$$\log x = \log A - \log B$$

Pour éviter la soustraction des logarithmes l'un de l'autre, ajoutons 10 aux deux membres ; appelons *complément logarithmique* la différence $10 - \log B$ et nous aurons

$$10 + \log x = \log A + c^t \log B$$

Ainsi soit la fraction $\frac{5647}{2309}$ qui donne lieu, d'après cela, aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} \log 5647 &= 3{,}7518178 \\ c^t \log 2309 &= 6{,}6365761 \\ \hline 10 + \log x &= 10{,}3883939 \\ \log x &= 0{,}3883939 \\ x &= 2{,}309 \end{aligned}$$

On a obtenu 6,6365761 en soustrayant de 10 le logarithme de 2309; après que la somme 10,3883939 a été trouvée, on en a retranché 10 qui est l'erreur produite par suite du complément utilisé; on en déduit cette règle,

Au lieu de soustraire le logarithme d'un nombre plus grand que 1 additionnez le complément de ce logarithme; cette erreur exige, quant à la fraction, LA CORRECTION PAR SOUSTRACTION *de* 1 DIZAINE DE LA CARACTÉRISTIQUE FINALE.

538. Si A < B, alors comme *log* A — *log* B serait négatif, l'addition de C^t *log* B ramène évidemment l'opération à la méthode co-logarithmique.

539. THÉORÈME IV. *Un complément co-logarithmique n'entraîne aucune correction.*

Démonstration. Soit $x = \frac{A}{0.\gamma}$; le dénominateur étant plus petit que 1, on peut successivement écrire

$$\log x = \log A - \log 0,f$$
$$\log x = \log A + 10 - 10 - \log 0,f$$
$$\log x = \log A + 10 - (10 + \log 0,f)$$

Or

$$10 + \log(0,f) = \text{colog } 0,f$$

Par suite

$$\log x = \log A + 10 - \text{colog } 0,f$$

Ou enfin d'après la définition du complément

$$\log x = \log A + C^t \text{colog } 0,f \qquad c.q.f.d.$$

Cette propriété correspond à la soustraction d'un co-logarithme.

Scholie général. De ce qui a été dit ci-dessus résulte que :

1° L'introduction d'un complément logarithmique exige la soustraction de 1 dizaine de la caractéristique du résultat.

2° L'introduction d'un co-logarithme entraîne la même correction.

3° L'introduction d'un complément co-logarithmique n'altère pas la valeur du résultat.

540. Problème. *Calculer par co-logarithmes*

$$x = (0.f)^n.$$

On aura successivement

$$\log x = n.\ \log 0{,}f$$

Ajoutant aux deux membres $n \cdot 10$, on obtiendra

$$(n-1)\ 10 + (10 + \log x) = n\ (10 + \log 0{,}f)$$

D'où

$$\text{colog}\ x = n\ \text{colog}\ 0{,}f - (n-1)\ 10$$

D'où l'on voit que :

Théorème v. *Le cologarithme d'une puissance de fraction est égal à l'excès du produit du degré par le co-logarithme de la fraction sur autant de dizaines moins une qu'il y a d'unités dans le degré de la puissance.*

541. Problème. *Calculer par co-logarithmes la valeur de x donnée par*

$$x = \sqrt[i]{0{,}f}$$

Comme x est plus petit que 1, multiplions les deux membres par 10^{10} pour passer ensuite aux co-logarithmes :

$$10^{10} x = 10^{10} \sqrt[i]{0{,}f}$$

d'où

$$\left(10^{10} x\right)^i = 10^{10\,i}.0{,}f = 10^{(i-1)\,10}.\ (10.0{,}f)$$

$$i.\ \text{colog}\ x = (i-1)\ 10 + \text{colog}\ 0{,}f$$

$$\text{colog}\ x = \frac{\text{colog}\ 0.f + (i-1)\ 10}{i}$$

Par suite ce

Théorème vi. *Le co-logarithme d'une racine de fraction est égale au quotient, par l'indice, de la somme que l'on obtient en ajoutant au co-logarithme de la fraction autant de dizaines moins une qu'il y a d'unités dans l'indice de la racine.*

542. L'exercice suivant traité par les deux méthodes logarithmiques qui viennent d'être exposées, montrera suffisamment le dispositif à adopter pour ce genre de calculs.

Soit à calculer la valeur de x fournie par

$$x = \sqrt[8]{\frac{\frac{73}{917} \cdot \left(\frac{13}{39}\right)^7 \cdot 0{,}0001829}{\left(\frac{415}{512}\right)^3 \cdot \frac{17}{48} \cdot (0{,}234567)^4}}$$

log 73 =	1,8633229	log 72 =	1,8633229
c^t log 917 =	7,0376307	— log 917 =	$\bar{3}$,0376307
log 17 =	1,2304489	log 17 =	1,2304489
6 log 17 =	7,3826934	6 log 17 =	6,3826934
c^t log 39 =	8,4089354	— log 39 =	$\bar{3}$,4089354
6 c^t log 39 =	50,4536124	— 6 log 39 =	$\overline{10}$,4556124
colog 0,0001829 =	6,2622137	log 0,0001829 =	$\bar{4}$,2622137
log 512 =	2,7092700	log 512 =	2,7092700
2 log 512 =	5,4185400	2 log 512 =	5,4185400
log 48 =	1,6812412	log 48 =	1,6812412
c^t log 17 =	8,7695511	— log 17 =	$\bar{2}$,7695511
c^t log 415 =	7,3819519	— log 415 =	$\bar{3}$,3819619
2 c^t log 415 =	14,7639038	— 2 log 415 =	$\bar{6}$,7639038
c^t colog 0,234567 =	0,6297331	— log 0,234567 =	0.6297331
3 c^t colog 0,234567 =	1,8891993	— 3 log 0,234567 =	1,8891993
	125,8822478		$\bar{5}$,8822478

corrections $\begin{cases} -\ 130 \\ +\ 10 \\ +\ 70 \end{cases}$

$$\text{colog}\ x = \frac{75{,}8822478}{8}$$

colog x = 9,4852809
x = 0,3057...

$$\log x = \frac{\bar{5}{,}8822478}{8}$$

log x = $\bar{1}$,4852809
x = 0,3057...

On ne calcule d'abord que le logarithme de la quantité sous-radical.

La méthode à *caractéristique négative* fournit immédiatement le logarithme de x; mais la méthode *complémentaire-co-logarithmique* exige, à titre de corrections, que l'on retranche



10 autant de fois que le calcul a employé de *compléments logarithmiques* et de *co-logarithmes ;* on aura donc ici à soustraire 130, et comme le reste serait négatif et qu'ainsi x est une fraction, on doit employer d'une part le co-logarithme de la quantité soumise au radical, d'autre part le co-logarithme de x ; et l'on aura à ajouter 10 et (n° 541) 70, ce qui fournira,

$$\text{colog } x = \frac{75{,}8822478}{8}$$

La détermination de x s'achève alors d'après la règle connue.

Il est incontestable que la méthode à caractéristique négative est préférable à celle des compléments et des co-logarithmes, et qu'elle est bien plus simple et plus prompte tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique ; cependant la méthode co-logarithmique étant généralement employée par le génie militaire, nous croyons qu'il est indispensable d'en posséder l'emploi avec assurance et facilité.

EXERCICES.

1. Un domestique s'engage à raison de 150 frs annuellement, et de 20 frs d'augmentation chaque année : on demande combien il recevra à la fin de la quinzième année, et combien il aura reçu en totalité pendant ces 15 ans.

2. Quelqu'un dépense aujourd'hui 2 frs, et ensuite chaque jour 10 centimes de plus. Combien aura-t-il dépensé en 21 jours ?

3. Pour le creusement d'un puits on donne à un ouvrier 2 frs pour le premier mètre de profondeur, 4 frs pour le second mètre, et ainsi de suite en augmentant de 2 frs par chaque mètre de profondeur. L'ouvrier trouvant l'eau à 17 mètres quelle somme devra-t-on lui payer ?

4. Quelqu'un s'est acquitté d'une dette de 495 frs en 15



paiements : la différence de deux sommes consécutivement versées est de 3 frs. Quelles étaient les valeurs du premier et du dernier paiement?

5. Une même distance est parcourue par deux personnes partant en même temps et arrivant au même instant. On demande combien elles ont fait de lieues et combien elles ont été de jours en route sachant que l'une a fait 6 lieues le premier jour, 7 le deuxième, en augmentant chaque jour d'une lieue, et que l'autre a fait 9 lieues le premier jour, en augmentant chaque jour d'un quart de lieue.

6. Le premier terme d'une progression par quotient est 4, le second est triple du premier, le troisième triple du second, et ainsi de suite. On demande quel est le 14e terme de cette progression?

7. Pour creuser un puits on donne, à des ouvriers, $2\frac{1}{2}$ frs pour le premier mètre de profondeur, un cinquième de plus pour le second mètre, et ainsi de suite en augmentant d'un cinquième le prix de chaque mètre pour avoir le prix du mètre suivant. Le puits ayant 11 mètres de profondeur, on demande combien on doit payer aux ouvriers.

8. On a effectué 6 payements en progression par quotient : le premier a été de 5 frs, le dernier de 5120 frs, et l'on a payé en tout 6825 frs. Quels sont les payements intermédiaires?

9. *Théorème.* Dans toute progression par quotient, quatre termes forment une égalité fractionnaire si 2 de ces termes sont équidistants des deux autres.

10. Quelle est la limite de la somme des fractions

$$1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{9}{125} + \frac{12}{625} + \cdots$$

dont les numérateurs forment une progression par différence et les dénominateurs une progression par quotient.

11. Calculer 1° par la méthode *complémentaire-co-logarithmique*,

2° par la méthode *à caractéristique négative*.

$$x = 68954{,}201 \cdot 234000 \,.\, 0{,}0082395 \,.\, 0{,}000000056$$

$$y = \frac{0{,}234 \,.\, 0{,}00000097502 \,.\, 0{,}768}{345{,}678 \,.\, 0{,}0004057}$$

$$z = \left(\frac{42356}{1966192}\right)^{4} \quad , \quad t = \sqrt[7]{\frac{42356}{1966192}}$$

$$u = \sqrt[7]{\left(\frac{42356}{1966192}\right)^{4}} \quad , \quad r = \left(\sqrt[7]{\frac{42356}{1966192}}\right)^{4}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{267{,}581 \,.\, \left(\frac{836{,}82}{8127{,}53}\right)^{5}}{0{,}002356 \,.\, (786{,}5)^{2}}}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\left(\frac{851{,}298}{56239{,}05}\right)^{5} \cdot \frac{95\,892}{0{,}182}}$$

$$\gamma = \sqrt[8]{\frac{\frac{2}{3} \,.\, \frac{4}{8} \,.\, 82 \,.\, 0{,}000713}{\frac{7}{11} \,.\, \frac{13}{17} \,.\, 738452 \,.\, 0{,}00921}}$$

$$\delta = \sqrt[11]{\frac{\frac{364527}{982374} \,.\, (0{,}025)^{4} \,.\, (7288{,}3)^{2}}{0{,}00825 \,.\, (987)^{7} \,.\, \frac{827}{427}}}$$

$$\theta = \frac{1}{2 \,.\, 0{,}363 \,.\, 0{,}0015} \sqrt{\frac{9{,}8088 \,.\, 13{,}55}{3{,}1416 \,.\, 8{,}8}}$$

12. Calculer la valeur de x fournie par les expressions

$$3^{2x} \,.\, 5^{6x-7} = 9^{x-2} \,.\, 7^{1-x}$$

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^{3-x} = (632)^{\frac{7}{2}x} \,.\, \left(\tfrac{56}{39}\right)^{\frac{5}{2}x}$$

13. Calculer

$$x = \sqrt[4]{\frac{132.(7,356)^9}{\sqrt{(3,25)^5}}}, \quad y = \frac{\sqrt[10]{43} + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}$$

14. On donne

$$\log 3 = 0,4771213$$
$$\log 2 = 0,3010300$$

et l'on demande d'en déduire *log* 75.

15. Un pigeon femelle donne tous les ans 6 pigeons, 3 femelles et 3 mâles; de même chaque femelle fournissant consécutivement chaque année 3 femelles et 3 mâles, combien y aura-t-il de pigeons produits au bout de 20 ans?

16. La population d'un Etat ayant 2000000 d'âmes augmente chaque année de $\frac{1}{100}$; celle d'un autre, qui est de 3000000 diminue annuellement de $\frac{1}{90}$. Dans combien d'années ces deux Etats seront-ils également peuplés?

17. Combien y a-t-il de chiffres dans la centième puissance de 2?

18. Quelqu'un place à la loterie 1 franc et perd; il place ensuite 3 fois cette somme et perd encore, et continue ainsi toujours en triplant jusqu'à la 15e fois. Combien a-t-il alors perdu en tout?

19. *Sessa*, inventeur du jeu d'échecs, demanda comme récompense à Seherand, roi de l'Inde: 1 grain de blé pour la première case, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, et ainsi de suite en doublant toujours. Combien faut-il de grains de blé?

20. Quelle est la raison d'une progression par quotient de 32 termes dont le premier est 5 et le dernier 80. Quelle sera la somme de cette progression, et quel en est le vingtième terme?

21. La somme des six premiers termes d'une progression par quotient de 7 termes est $157\frac{1}{2}$; la somme des 6 derniers, 315. Quels sont ces termes?

22. Sachant que dans une machine pneumatique la course du piston correspond à une capacité qui est le quart de celle du réservoir, on demande la quantité d'air qui restera dans le récipient après 10 coups de piston.

23. Un charretier doit déposer 50 voitures de sable en des points espacés de 20^m en 20^m sur une route; le point où il vient prendre le sable est situé sur la même route, à 150^m de celui où il doit déposer la première voiture; quel chemin aura-t-il à parcourir pour déposer les 50 voitures et revenir au point de départ?

24. Quelqu'un s'est acquitté d'une dette en 16 payements formant une progression différentielle; le premier et le dernier ont été de 12 et 27 francs. Quelle somme était due?

25. Un malfaiteur s'échappe de sa prison et fait 10 lieues par jour. Un gendarme se met à sa poursuite 6 jours après, et fait chaque jour une lieue de plus que le jour précédent. Le malfaiteur ayant été atteint 21 jours après son évasion, on demande combien le gendarme a dû faire de lieues le premier jour de poursuite.

26. Connaissant le premier terme 4 et la raison 3 d'une progression factorielle, quelle est la somme des termes compris entre le 8e et 21e terme?

27. Partager 1093 en un nombre de parties en progression par quotient, de manière que 730 soit la somme des extrêmes et 731 leur différence, augmentée de la raison.

28. Un joueur double sa mise chaque fois qu'il perd. Si sa mise primitive était de 0,25 frs, et qu'il perdît 20 fois de suite, quelle serait sa perte totale?

29. Un maquignon interrogé sur le prix d'un cheval répond:

les fers de mon cheval sont fixés à l'aide de 20 clous : si vous me donnez 1 centime pour le premier, 2 centimes pour le second, 4 pour le troisième et ainsi de suite, toujours en doublant, je vous donnerai le cheval et 485,75 frs. On demande combien il l'estimait.

30. La population d'un Etat est de 68 millions d'habitants, et elle s'accroît chaque année de $\frac{1}{250}$ de sa valeur ; on demande quelle sera la population de cet Etat dans 50 ans ?

31. La population d'un Etat s'est accrue d'*un tiers* dans l'espace d'un demi-siècle ; de quelle fraction sa valeur augmente-t-elle par année ?

32. Partager 700 en quatre parties qui soient en progression par quotient, et telle que l'excès de la plus grande sur la plus petite ait avec la différence des moyennes le rapport $\frac{37}{12}$.

33. Construire une progression différentielle dont 49 est la somme des *sept* premiers termes, 651 celle des sept derniers et 2500 celle de tous les termes.

LIVRE IX.

—

MESURES ET APPLICATIONS GÉNÉRALES.

—

CHAPITRE I.

—

EXPOSITION DU SYSTÈME MÉTRIQUE.

—

Défaut d'uniformité dans les anciennes mesures. — Unité fondamentale. — Unités de longueur, de surface, de volume, de capacité, de poids, de monnaie, de temps; calendriers.— Subdivisions et multiples des diverses unités principales. — Ecriture et calcul des nouvelles mesures, les mêmes que pour les nombres décimaux. — Dimensions et forme des mesures autorisées par la loi. — Anciennes mesures. — Conversion des anciennes mesures en nouvelles et inversement. — Mesures anglaises et prussiennes.

545. Nous avons déjà dit que les quantités à admettre pour *unités* peuvent être choisies arbitrairement, et il n'y a pas en apparence de *motif déterminant* pour préférer telle ou telle unité. Chaque pays, chaque contrée, chaque localité même a eu ses unités particulières; de là pour les relations commerciales, et pour les recherches scientifiques des inconvénients immenses sur lesquels nous croyons inutile de

nous arrêter : dans toute question d'échange mercantil ou intellectuel, l'uniformité dans le système des mesures est une chose presqu'indispensable.

C'était une tâche difficile à accomplir que de détruire, par l'adoption de mesures uniformes nouvelles, les systèmes anciens et nombreux implantés dans les populations : il fallait pour cela que le nouveau système s'imposât lui-même par l'évidence de ses avantages, et par la facilité de son appropriation à la numération décimale.

544. L'*unité* FONDAMENTALE nouvelle devait, pour être inaltérable, être fournie par la nature elle-même : envers une telle unité les susceptibilités nationales n'ont plus de raison d'être, tous les peuples ayant d'ailleurs un égal intérêt à l'adoption d'un système général de poids et mesures.

L'ignorance est sans doute la seule cause qui ait pu empêcher, pendant tant de siècles, de proclamer l'utilité et la nécessité d'une telle unité fondamentale que l'on pourrait appeler *naturelle.*

La nature présente : 1° *la longueur du pendule à seconde*, c'est-à-dire la longueur à donner au pendule en un lieu déterminé, pour que la durée d'oscillation soit d'une seconde ; 2° la *méridienne terrestre.*

La longueur du pendule à seconde est fonction de la latitude avec laquelle elle varie, et il faudrait évidemment si on l'adoptait pour unité, indiquer encore le lieu, ou tout au moins, la latitude correspondante; le système résultant serait dès lors entâché d'une espèce de caractère local qu'il est important d'éviter; au contraire, la longueur du *méridien terrestre* étant la même pour tous les points du globe, c'est à cette longueur qu'il convenait de demander l'unité nouvelle.

Des travaux immenses, entrepris et exécutés par les premiers savants français, furent soumis à l'examen d'un congrès scientifique européen ; ces travaux qui furent approuvés, établirent par suite de la mesure directe de la distance du pôle à l'équateur terrestre, que

$$\frac{\text{Méridien terrestre}}{4} = 5130740 \text{ Toises.}$$

On divisa cette distance en 10,000,000 de parties, et l'on dit que

Le mètre est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

545. Le mètre est donc la *base unitaire* du système nouveau, appelé pour cette raison, *système métrique;* les autres unités sont les suivantes :

Le carré construit sur un mètre, c'est-à-dire le MÈTRE CARRÉ, est l'unité destinée à la mesure des surfaces.

Le cube construit sur un mètre, c'est-à-dire le MÈTRE CUBE est l'unité de solidité et de capacité.

Enfin, et quant aux mesures de poids, on a pesé dans un cube ayant pour côté la $\frac{1}{100}$ partie du mètre, de l'eau distillée à 4 degrés centigrades; le poids de cette eau a été appelé *gramme*, et est l'unité de poids.

L'unité monétaire est une pièce d'argent du poids de 5 grammes, et qui sur 10 parties en renferme 1 de cuivre et 9 d'argent pur; l'unité ainsi obtenue a reçu le nom de *franc.* Disons en passant que dans tout alliage d'or ou d'argent, on appelle FIN le rapport des parties de métal étranger et de l'alliage; ainsi pour les monnaies d'argent $\frac{1}{10}$ est le *fin.*

546. Les travaux des savants chargés de l'établissement du système métrique furent terminés en 1799, et le 22 juin 1799 les *prototypes* de longueur et de poids furent déposés dans les archives de la République française.

547. On a soumis le système nouveau à la loi décimale en y faisant croître les multiples et sous-multiples de l'unité suivant les puissances de 10; on emploie à cette fin les particules

myria, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*,

comme synonymes respectifs de,

dix mille, *mille*, *cent*, *dix*, *dixième*, *centième*, *millième*.

Cependant cela ne s'applique pas aux multiples ni aux subdivisions du franc, du mètre carré et du mètre cube.

Avant d'aller plus loin disons que toutes les fois qu'il s'agit de mesures *agraires*, on adopte une unité plus grande que le mètre carré; c'est alors l'*are*, ou carré ayant 10 mètres de côté, que l'on emploie.

L'unité de mesure pour le bois de chauffage ou de construction est le *stère*, *ou cube arêtier à claire-voie de 1 mètre de côté*.

L'unité de mesure pour les liquides est le *litre*, *qui a la capacité d'un cube ayant 1 décimètre de côté*.

Le tableau suivant résume la nomenclature métrique.

RAPPORT des longueurs décimales de chaque espèce à son unité.	Nom du multiple, du sous-multiple. 1re partie.	Nom du multiple, du sous-multiple. 2e partie.
10000	Myria	Mètre Are Stère Litre Gramme
1000	Kilo	
100	Hecto	
10	Déca	
1		
0,1	Déci	
0,01	Centi	
0,001	Milli	

Pour les mesures agraires, au lieu de myria-are, kilo-are, hecto-are, déca-are, on dit : *myriare, kiliare, hectare, décare* ; parmi les multiples de l'are on n'emploie que l'*hectare*, et parmi les sous-multiples, le *centiare*.

Comme mesures de poids on a encore :

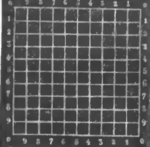
le *quintal métrique* = 100 kilogrammes.

» *tonneau de mer* = 1000 kilogrammes.

Et il est bon de remarquer que le kilogramme est le poids de 1 litre, et le tonneau de mer celui de 1 mètre cube d'eau distillée à 4 degrés centigrades.

Pour les monnaies aucun des multiples du franc n'est usité, et parmi les sous-multiples on n'emploie que les deux premiers qui s'appellent *décime* et *centime*.

548. Voyons la loi de subdivision superficielle, et en général considérons un carré, dont nous divisons chaque côté en 10 parties égales numérotées de la même manière et dans le même sens à partir de chaque sommet ; joignons ensuite par des lignes droites les points de *mêmes numéros* appartenant aux côtés opposés du carré qui se trouvera ainsi partagé en 10 colonnes verticales, dont chacune renferme 10 petits carrés.



Le carré proposé contient donc 100 petits carrés ; les côtés de ces carrés étant décuples l'un de l'autre.

Il en résulte immédiatement que si le carré donné a 1 mètre, 1 décimètre, ou 1 centimètre de côté, le côté du petit carré obtenu par la décomposition, a respectivement 1 décimètre, 1 centimètre, 1 millimètre pour côté.

C'est ce qui prouve que :

Le mètre carré se subdivise en $\begin{cases} 100 \text{ décimètres carrés.} \\ 100^2 \text{ centimètres carrés.} \\ 100^3 \text{ millimètres carrés.} \end{cases}$

Ou, en d'autres termes que,

1 décimètre carré $= 0^{m^2},01$

1 centimètre carré $= 0^{m^2},0001$

1 millimètre carré $= 0^{m^2},000001$

On voit aussi que le carré de 10 mètres de côté ou l'*are*, vaut 100 mètres carrés ; et que par suite

1 centiare = 1 mètre carré.

Il s'ensuit que pour énoncer une fraction décimale de mètre carré il faudra, au préalable, partager cette fraction en allant vers la droite et à partir de la virgule, *en tranches de deux chiffres ;* puis, en commençant par la gauche, *énoncer successivement chaque tranche comme si elle était seule, pour la qualifier ensuite du nom de décimètre, centimètre, ou millimètre carré suivant que cette tranche est la première, la deuxième ou la troisième.* —

Ainsi par exemple le nombre $86413^{m^2},59765$ représente 8 hectomètres carrés, 64 décamètres carrés 13 mètres carrés 59 décimètres carrés 76 centimètres carrés 50 millimètres carrés.

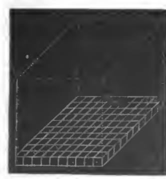
Si 10 mètres est le côté du carré considéré, 1 mètre sera celui du carré de décomposition ; d'où l'on voit que

1 are = 100 mètres carrés.

1 centiare = 1 mètre carré.

549. Pour découvrir la loi de subdivision des volumes, construisons un cube dont l'une des faces prise pour base a

été, comme au paragraphe précédent, divisée en 100 carrés, et dont les arêtes perpendiculaires à la base sont divisées en 10 parties égales ; les plans menés par les points de division de même rang, à partir de cette base décomposeront le cube en 10 bandes égales.



Considérons la première bande dont la base du cube fait partie ; si nous répétons dans la face opposée parallèle de cette bande, la division en 100 carrés de la base, puisque nous joignons les points de même division par des lignes droites, cette bande se trouvera décomposée en 100 petits cubes : la même chose pouvant être dite quant aux autres bandes, on voit que le cube contient en totalité 10 fois 100 ou 1000 petits cubes.

On en conclut, en supposant successivement que le côté du cube donné est 1 mètre, 1 décimètre, 1 centimètre, que :

Le mètre cube se subdivise en $\left\{\begin{array}{l} 1000 \text{ décimètres cubes.} \\ 1000^2 \text{ centimètres cubes.} \\ 1000^3 \text{ millimètres cubes.} \end{array}\right.$

Ou en d'autres termes que

$$1 \text{ décimètre cube} = 0^{m^3},001$$

$$1 \text{ centimètre cube} = 0^{m^3},000001$$

$$1 \text{ millimètre cube} = 0^{m^3},000000001$$

Il en résulte aussi que *les divers ordres d'unités de volume, à partir de l'ordre le plus élevé, doivent être représentés chacun par trois chiffres ;* ainsi le nombre $6513^{m^3},7024869$ repré-

sente 6 décamètres cubes 513 mètres cubes 702 décimètres cubes 486 centimètres cubes 900 millimètres cubes.

550. Parlons actuellement du temps et de sa mesure.

Le temps nécessaire à la terre pour opérer sa révolution complète autour du soleil a reçu le nom d'*année tropique;* le *jour* est le temps que la même planète emploie pour exécuter une révolution entière autour de son axe.

L'année tropique est de $365^{j},24225694$ ou de $365^{j} - 5^{h} - 48' - 51''$; l'année civile ou ordinaire est de 365 jours.

On partage cette période en 12 parties, ou mois, dont les noms sont connus de chacun; un jour intercallaire est ajouté périodiquement au mois de février. L'année civile se partage aussi en semaines, ou périodes de 7 jours.

L'année civile étant moindre que l'année tropique, son origine rétrogradait sans cesse par rapport aux éléments qui fixent la durée de celle-ci; elle ne correspondait de nouveau à ces éléments qu'après un intervalle de 1508 ans. D'aussi graves inconvénients devaient avoir un terme.

Une première correction eut lieu sous *Jules-César;* cette correction forma le *Calendrier-Julien qui consistait à tenir compte du $\frac{1}{4}$ de jour négligé par l'année civile, en faisant succéder à 3 années consécutives de 365 jours, une année de* 366; cette quatrième année fut nommée ANNÉE BISSEXTILE, et le jour complémentaire qu'elle renferme fut ajouté au mois de février.

Dans cette réforme on voulut donc tenir compte du $\frac{1}{4}$ de jour d'erreur de l'année civile, et l'on introduisit ainsi et par *excès* une erreur annuelle de $0^{j},0074306$.

Sous le pape Grégoire XIII, l'astronome *Aloysius Lilius* proposa cette règle de correction :

Toute année non séculaire dont le nombre est divisible

par 4 est une année bissextile; toute année séculaire dont le nombre est multiple de 400 *est également bissextile. Toutes les années qui ne satisfont pas à l'une de ces deux conditions sont des années communes.*

La réforme nouvelle produisit le *Calendrier Grégorien*, et snppose l'année tropique de 365^j,24225.

L'approximation résultante est telle que sur 100000 années grégoriennes, ou sur 36524225 jours, il n'y a pas 1 jour d'erreur.

L'adoption du Calendrier Grégorien date de 1582.

Cependant le calendrier Julien est encore suivi par les *Russes;* cette manière de compter s'appelle *vieux-style*, par opposition au Calendrier Grégorien qui s'appelle *nouveau-style :* l'anticipation du nouveau sur l'ancien est de 12 jours.

Toute année commune contient 52 semaines et 1 jour; toute année bissextile, 52 semaines et 2 jours.

En 1792, à la suite de la grande révolution française; on adopta un nouveau calendrier que l'on nomme *Calendrier républicain :* les mois portaient des noms différents de ceux du calendrier ordinaire et les jours y avaient reçu des dénominations latines ordinales.

Le nonveau style français, qui a eu 14 années d'existence, commence le 22 septembre 1792 et finit le 22 septembre 1806; les années républicaines se désignent par *an I, an II,..... an XIII, an XIV.*

551. Nous avons à dire quelques mots de la division circulaire. D'après l'ancienne méthode la circonférence se divise d'abord en 4 parties égales, dont chacune porte le nom de *quadrant;* chaque quart de circonférence est ensuite divisé en 90 parties égales; ces dernières parties se nomment des *degrés*, et chacune d'elles se divise en 60 minutes, puis

chaque minute en 60 secondes, et chaque seconde en 60 tierces.

Les signes représentatifs du degré, de la minute, de la seconde et de la tierce, sont respectivement 1^{d}, $1'$, $1''$, $1'''$.

Dans le nouveau système, chaque quart de circonférence est divisé en 100 parties appelées *grades* dont le signe est *gr*, le grade en 100 et en 10000 parties ; le $\frac{1}{100}$ et le $\frac{1}{10000}$ d'un grade se représentent comme la minute et la seconde par les signes $1'$ et $1''$.

L'ancienne division circulaire porte le nom de *graduation sexagésimale*, et la nouvelle, celui de *graduation centésimale*.

552. Les subdivisions et les multiples des diverses unités du système métrique formant des séries d'unités croissant suivant les puissances de 10, de 100 ou de 1000, il en résulte un ensemble complètement en harmonie avec les usages de la numération décimale ; par suite l'écriture et le calcul des nouvelles mesures sont les mêmes que pour les nombres décimaux.

—

DIMENSIONS ET FORME DES MESURES LÉGALES.

553. La loi du 5 Juin 1832 décrète l'adoption du système métrique en Belgique, et détermine les mesures dont l'usage est permis. — Les noms de ces mesures sont :

Pour les longueurs. — *Double décamètre, décamètre, demi décamètre, double mètre, mètre, demi mètre, double décimètre, décimètre.*

Ces mesures doivent être construites en métal, en bois ou en autre matière solide ; elles peuvent être *brisées*, pourvu que le nombre des parties soit 2, 5 ou 10. Le décamètre, le double décamètre et le demi décamètre doivent être construits de manière que leurs diverses parties soient de

mètre en mètre, réunies par des anneaux d'un métal d'une couleur différente de celui dont la chaîne est faite.

Les surfaces et les volumes ne sont jamais mesurés directement par des unités spéciales, et leur évaluation est toujours ramenée par la géométrie à la mesure d'une ou de plusieurs lignes.

MESURES DE SOLIDITÉ. — 1° *Pour les bois de chauffage. Le demi-décastère*, le *double stère* et le *stère* sont les seules mesures autorisées. Ces mesures, à claire-voie, sont composées de *membrures en bois* dur; une de ces membrures, qu'on appelle *sole*, repose à terre et les autres ou montants perpendiculaires à celle-là sont fixées à l'aide de fiches et de deux sous-traits.

La longueur de la sole entre les montants est

Demi-décastère	3 mètres.
Double stère.	2 mètres.
Stère	1 mètre.

Pour les bois coupés à 1 mètre de longueur, la hauteur des montants sera

Demi décastère	1^m,667.
Double stère et stère. . . .	1^m,000.

Cette hauteur varie selon la longueur du bois, de manière à toujours reproduire un solide de 1, 2 ou 5 mètres cubes : dans le cas où les buches sont d'inégale longueur, on prend la moyenne de leurs longueurs.

2° *Mesures de capacité pour les liquides*. On a :

Hectolitre, *demi-hectolitre*, *quart-d'hectolitre*, *décalitre*, *demi-décalitre*, *double litre*, *litre*, *demi-litre*, *double décilitre*, *décilitre*, *demi-décilitre*, *centilitre*. Toutes ces mesures de forme cylindrique, peuvent être en cuivre, tôle ou fonte, avec réserve d'étamage empêchant l'altération ou l'oxydation ; le

double-litre et les mesures au-dessous doivent être construites en *étain.*

Les vases servant aux liquides et contenant plus de deux litres sont aussi hauts que larges; dans les autres la largeur n'est que la moitié de la hauteur.

Pour le lait il y a des vases, d'un litre et d'un demi-litre, en fer blanc aussi hauts que larges.

3° *Mesures de capacité pour les matières sèches.*

Ces mesures sont les mêmes que pour les liquides, mais ont chacune une hauteur égale à leur diamètre; il n'y a pas de centilitre, et elles sont toutes faites en bois ou en tôle. La mesure n'est exacte que pour autant que la matière à mesurer atteigne les bords du vase : on s'assure que cette condition est remplie à l'aide d'une règle ou tige de fer bien droite que l'on passe à frottement sur les bords de la mesure.

Voici le tableau des dimensions des mesures de capacité pour les liquides et les matières sèches.

DÉNOMINATIONS.	LIQUIDES.		MATIÈRES SÈCHES.	
	diamètre	hauteur	diamètre	hauteur.
Hectolitre.	0,5032	0,5032	0,5032	0,5032
Demi-hectolitre	0,3992	0,3992	0,3992	0,3992
Quart-d'hectolitre	0,3169	0,3169	0,3169	0,3169
Décalitre	0,2335	0,2335	0,2335	0,2335
Demi-décalitre	0,1853	0,1853	0,1853	0,1853
Double-litre	0,086024	0,172048	0,1366	0,1366
Litre	0,068268	0,136536	0,1084	0,1084
Demi-litre	0,054192	0,118384	0,0860	0,0860
Double décilitre	0,039928	0,079856	0,0634	0,0634
Décilitre	0,031692	0,063384	0,0503	0,0503
Demi-décilitre	0,025152	0,050304	0,0399	0,0399
Centilitre	0,014710	0,029420		

Mesures de poids.— Les poids adoptés sont en fonte de fer ou en cuivre. On les distingue en 3 séries : les *gros poids* qui surpassent 1 kilogramme; les *poids moyens* qui sont compris entre le gramme et le kilogramme; les *petits poids* qui sont moindres que le gramme.

Les poids en fer sont de

(50, 20, 10, 5, 2 et 1) kilogrammes.
(500, 200, 100, 50) grammes.

Les poids en cuivre sont de

(20, 10, 5, 2, 1) kilogrammes
(500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1) grammes.
(5, 2, 1) décigrammes.
(5, 2, 1) centigrammes.
(5, 2, 1) milligrammes.

Les poids au-dessous du gramme sont surtout employés dans les analyses chimiques; ils sont quelquefois en argent ou en platine. Les poids, depuis et compris 5 décigrammes jusqu'au milligramme, se font avec des lames de laiton coupées en carré.

On construit aussi des poids en cuivre depuis un kilogramme et au-dessous, en leur donnant la forme de godets coniques qui s'empilent les uns dans les autres, et qui se trouvent ainsi renfermés dans une boite qui est elle-même un poids légal.

Monnaies. Les monnaies belges ayant cours légal sont d'argent, de cuivre rouge, ou d'un alliage de nikel et de cuivre; les pièces d'argent sont de 5, de 2 $\frac{1}{2}$, de 2, de 1, de $\frac{1}{2}$ francs, et de 20 centimes; les pièces de cuivre sont de 10, de 5, de 2 et de 1 centimes; les *pièces de nikel*, qui sont de 20, de 10 et de 5 centimes, ne contiennent que 25 pour 100 de nikel.

La loi fixe comme suit les poids et diamètres des diverses pièces de monnaie.

Monnaie	Valeur en francs	Poids en grammes	Diamètre en millimètre
Argent	5	25	37
»	2,50	12,5	30
»	2	10	27
»	1	5	23
»	0,50	2,5	18
»	0,20	1	15
Cuivre	0,10	20	32
»	0,05	10	28
»	0,02	4	22
»	0,01	2	17
Nikel-cuivre	0,20	7	23
»	0,10	4,5	21
»	0,05	3	19

Les pièces d'argent belges portent l'effigie du souverain avec l'inscription : *Léopold I, roi des Belges;* sur le revers, l'indication de la valeur de la pièce et le millésime, entouré d'une couronne de chêne; sur la tranche, la légende *Dieu protège la Belgique*; les pièces moindres que 2 francs sont cordonnées sur la tranche.

Les pièces en cuivre belges sont cordonnées sur la tranche et portent d'un côté l'indication de la valeur et le lion belge appuyé sur la table de la constitution : de l'autre le chiffre du roi, surmonté d'une couronne royale, et au-dessous le millésime.

Un arrêté royal du 23 avril 1861 décide que les pièces de 5 et de 10 centimes de nikel porteront d'un côté le lion belge sur un champ de sable avec un bord relevé, encadré de deux circonférences entre lesquelles est la devise nationale : *L'Union fait la force*. Au bas de la même face se trouvera le

millésime. Au revers dans un champ de sable en caractères brillants, la valeur nominale de la pièce et sur un bord relevé et encadré de deux circonférences, la légende *Léopold premier, roi des Belges*. Les pièces seront cordonnées en creux.

—

ANCIENNES MESURES.

554. *Longueurs*. L'unité principale de longueur était la *toise*, qui se divisait en 6 pieds de Charlemagne, ou *pieds de roi*; le pied, en 12 pouces ; le pouce, en 12 lignes; la ligne, en 12 points.

On employait aussi pour mesurer les étoffes les *aunes* de France et de Brabant.

Nous avons dit (nº 544) que

$$10000000 \text{ mètres} = 5130740 \text{ toises},$$

D'où

$$\overset{m}{1} = \overset{t}{0},513074$$

$$\overset{t}{1} = \overset{m}{1},9490365912 \tfrac{53256}{256537}$$

L'aune de France est de 3 pieds et 8 pouces, ou de 528 lignes, ce qui donne :

$$\overset{aune\,fr.}{1} = \frac{528}{864}^{t} = \overset{m}{1},1910779168 \tfrac{1209056}{2308833}$$

En Belgique, quant à l'aune de Brabant,

$$\overset{a.\,Br.}{12} = \overset{a.\,Fr.}{7}$$

et

$$\overset{a.\,Br.}{1} = \overset{m}{0},6947954514 \tfrac{6733514}{6926499}$$

En France il y a trois lieues connues sous les noms de *lieue*, *lieue-moyenne*, *lieue de poste*; on trouve sans peine que

1 lieue	= 2500 toises	= $4872,5914780324\frac{22012}{256537}$
1 lieue-moyenne	= 2250 toises	= $4385,3713109609\frac{235967}{256537}$
1 lieue de poste	= 2000 toises	= $3898,0731824259\frac{137834}{256537}$

Le *mille marin*, de 60 au degré, vaut 950 toises.

555. Surfaces. L'unité principale de surface était la toise carrée qui valait 36 pieds carrés; le pied carré, 144 pouces carrés, etc. — De la valeur de la toise en fonction du mètre carré, l'on déduit :

$$\overset{tt}{1} = \overset{m^2}{3},7987436335\,\frac{47212723588}{68811232369}$$

Quant aux mesures agraires, l'ancienne unité était la *perche des eaux et forêts*, qui contenait 484 pieds carrés; d'où,

$$1 \text{ p. e. f} = \frac{484}{36}^{tt} = 0,5107199763\,\frac{524492443077}{529801091321} \text{ ares.}$$

$$1 \text{ are} = 1,9580201324\,\frac{80}{121} \text{ p. e. f.}$$

L'*arpent* des caux et forêts vaut 100 perches; c'est la mesure correspondante à l'hectare dans le nouveau système.

556. Volumes. L'unité principale de volume était la *toise-cube* qui se divisait en 6^3, ou 216 pieds cubes; le pied cube en 12^3 ou 1728 pouces cubes, etc.

On a

$$\overset{m^3}{1} = 0,1350641289459692 24^{t^3}$$

$$\overset{t^3}{1} = 7,4038903430\,\frac{14039617083995210}{16883016118246153}^{m^3}$$

Mesures de solidité. On employait

1° *Pour le bois de chauffage*, la *corde* des eaux et forêts qui vaut 2 voies de 56 pieds cubes chacune.

$$\overset{voie}{1} = \frac{\overset{t^3}{56}}{216} = \frac{\overset{t^3}{7}}{27}$$

Ayant déjà déterminé le rapport de la *toise cube* et du *mètre cube*, on aura aisément

$$1^{v} = 1,9195271262 \tfrac{2671289618678234546}{3190890046348522317} \text{ stère.}$$

$$1^{st.} = 0,5209616401 \tfrac{59668996405406843577353343}{133125000023867349008791857}$$

29. Pour le bois de *charpente*, la solive qui se divise en 6 pieds; la solive vaut 3 *pieds cubes*; par suite

$$1^{t^3} = 216^{pieds^3} = 72 \textit{ solives} \quad , \quad 1^{sol} = \tfrac{1}{72}^{t^3}$$

$$1^{sol} = 0,1028456992 \tfrac{16019126912982224}{16683016118246153}^{stère}$$

$$1^{st.} = 9,72461728410978412 8^{solives}$$

Mesures de capacités. 1° *Pour les liquides*, l'unité était le *muid*. qui valait 36 *veltes;* la velte faisant 8 pintes, et la pinte 2 *chopines*.

La pinte faisant 46 pouces cubes et 95 centièmes, on a

$$1^{pinte} = 46,95 \cdot \frac{1^{t^3}}{72^3} = \frac{4695}{37324800} \text{ toise cube.}$$

D'où

$$1^{p} = 0,9313181895 \tfrac{5829159762644065150}{15629041668185273841} \text{ litre}$$

et

$$1^{litre} = 1,0737468796 \tfrac{2347083932}{5036640625} \text{ pinte.}$$

2° *Pour les matières sèches*. Le grain se mesurait au *muid* qui se divisait en 12 *setiers;* le setier en 12 *boisseaux*, le boisseau en 16 *litrons*. Le boisseau vaut 655 $\tfrac{5}{16}$ pouces cubes.

Le rapport entre la toise cube et le mètre cube fournira sans difficulté,

$$1 \text{ boisseau} = 13,0087000787 \tfrac{21232993799144454127}{4102572916733815179} \text{ litres.}$$

$$1 \text{ litre} = 0,0768716315 \tfrac{10274270963}{10673828125} \text{ boisseau.}$$

Poids. L'unité principale était la *livre marc*, qui se divisait en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, le gros en 3 *scrupules*, le scrupule en 24 *grains*. On voit ainsi que

$$\overset{liv.\,m}{1} = \overset{grains}{9216}$$

Et l'on sait que 1 gramme = 18,82715 grains ; on déduit de là que

$$\overset{kilog.}{1} = \overset{grains}{18827},15$$

$$1 \text{ kilog} = 2,0428765190\,\tfrac{35}{36} \text{ livres marc.}$$

$$\overset{liv.\,m}{1} = 0,4895058466\,\tfrac{36962}{376543} \text{ kilogramme.}$$

En pharmacie on faisait usage, dans notre pays, il y a peu de mois encore, de la livre valant 375 grammes, et qui se divisait en 12 *onces*, l'once en 8 *drachmes*, le drachme en 3 *scrupules*, et le scrupule en 20 *grains*.

On a donc

$$\overset{liv.\,ph}{1} = 0,375 \text{ kilogramme}$$

$$\overset{kilog}{1} = \tfrac{8}{3} \text{ liv. ph.}$$

Pour les cargaisons on calculait en *tonneaux* ; le tonneau valait 2 *milliers*, le millier 10 *quintaux*, et le quintal valait 100 livres poids de marc. A l'aide du rapport de la *livre marc* avec le kilogramme, on trouvera :

$$\overset{quintal}{1} = 48,9505847581\,\tfrac{231317}{376543} \text{ kilogrammes.}$$

$$\overset{kilog}{1} = 0,0209829874\,\tfrac{19}{144} \text{ quintal.}$$

558. Monnaies. L'unité principale de cette nature était la *livre tournois*, qui n'était qu'une *monnaie de compte ou idéale*, et qui n'a pas été frappée. Cette livre se divise en 20 *sous*,

le sous en 4 *liards*, le liard en 3 *deniers*. Une loi du 13 Vendémiaire an VIII (4 octobre 1800) établit que

$$81^{liv. t} = 80 \text{ francs}.$$

D'où

$$1 \text{ franc} = 1{,}0125 \text{ livre tournois}$$

$$1^{liv. t.} = 0{,}9876543209 \tfrac{71}{81} \text{ franc}.$$

Dans les *Pays-Bas* et en Belgique, on avait encore les *florins des Pays-Bas* et de *Brabant*, tels que

$$189 \text{ flor. P. B.} = 400 \text{ francs}.$$

$$441 \text{ flor. } B^{t} = 800 \text{ francs}.$$

D'où l'on tire

$$1 \text{ f. P. B} = 2{,}1164021164 \tfrac{4}{189} \text{ frs}.$$

$$1 \text{ f. } B^{t} = 1{,}8140589569 \tfrac{71}{441} \text{ frs}.$$

$$1 \text{ franc} = 0{,}4725 \text{ f. P. B.}$$

$$1 \text{ franc} = 0{,}55125 \text{ f. } B^{t}.$$

Ces deux dernières relations conduisent à cette autre importante :

$$6^{f. P. B.} = 7^{f B^{t}}$$

—

MESURES ANGLAISES ET PRUSSIENNES.

559. LONGUEURS. En Angleterre et aux Etats-Unis, l'unité est le *yard*, qui vaut $0^{m}91438348$; le yard se divise en 3 *pieds*, le pied en 12 *pouces*.

Les multiples du *yard* sont :

Fathom = 2 yards ; *Pole* ou *perch* = 5 ½ yards ;
Furlong = 320 yards ; *mile* = 1760 yards.



Le *mile marin* vaut 1852 mètres et la lieue marine anglaise, 3 miles.

En Prusse, l'unité est le *pied du Rhin* qui vaut $0^{m},3138536$; ce pied se divise en 12 pouces, et le pouce en 12 lignes : il a pour multiples la perche ou 12 pieds et le *mille de Prusse* de 24000 pieds.

Surfaces. L'unité anglaise est le *yard carré* qui vaut $0^{m^2}8360971484969104$; ses multiples sont le *Rod* ou perche carrée ; le *Rood* ou 1210 yards carrés et l'*Acre* qui vaut 4840 yards carrés.

L'unité superficielle en Prusse est le *morgen* qui renferme 180 perches carrées.

Mesures de capacités. En Angleterre l'unité est le *Gallon impérial* qui est égal à $4^{litre},54345794$; cette unité se divise en 4 *quart* et le quart en 2 *pint ;* ses multiples sont

Peck = 2 gallons
Bushel = 8 gallons
Sack = 3 bushels
Quarter = 8 bushels
Chaldron = 12 sacks.

En Prusse, l'unité pour les matières sèches est le *Schessel* qui vaut $54^{litres},961$; le schessel se divise en 16 *metzen* et en 48 *viertels* : pour les liquides l'unité prussienne est l'*Eimer* qui contient $68^{lit},69$ et qui se divise en 2 *ankers,* l'anker en 30 *viertels.*

Mesures de poids. L'Angleterre et les Etats-Unis ont deux unités de poids. La première est la *livre troy impérial* dont la valeur est $0^{kil.},37309526$, et qui se divise en 12 *onces;* l'once *troy* se divise en 20 Pennyweight; le Pennyweight en 24 *grains.*

La seconde est la *livre avoir du poids impérial :* elle vaut 7000 grains de livre troy ou $0^{kil.},4534148$, et se subdivise en 16 onces; puis l'once en 16 *dram :* ses multiples sont

Quintal = 112 livres avoir poids imp.

Ton = 20 quintaux imp.

La livre prussienne vaut $0^{kil.},467711$.

Monnaies. *Angleterre.*

		poids légal.	valeur.
		gr	fr
Or.	Guinée de 21 schellings.	8,3802	26,47
	Demi guinée.	4,1901	13,2350
	Quart de guinée.	2,0951	6,6175
	Tiers de guinée.	2,7934	8,8233
	Souverain (depuis 1808), de 20 schellings.	7,9808	25,2080
Argent.	Crow (couronne de 5 schellings anciens).	30,074	6,16
	Schelling ancien.	6,015	1,2360
	Crow (couronne depuis 1808)	28,2514	5,8072
	Schelling (depuis 1808).	5,6503	1,1614
	Etats-Unis.		
Or.	Double aigle de 10 dollars.	17,480	55,21
	Aigle de 5 dollars.	8,740	27,6050
	Demi aigle de 2 ½ dollars.	4,370	13,8025

Argent.	Dollar.	27,000	5,42
	Demi dollar.	13,500	2,71
	Quart de dollar.	6,750	1,355
	Prusse.		
Or.	Ducat.	3,491	11,77
	Frédéric.	6,689	20,80
	Demi Frédéric.	3,3445	10,40
Argent.	Risdale, ou *Thaler* de 30 silbergros de 1823.	22,272	3,7111
	Pièce de 5 silbergros.	3,712	0,6185
	Silbergros (valeur intrinsèque).	2,192	0,10

CHAPITRE II.

NOMBRES COMPLEXES.

Conversion d'un nombre complexe en une fraction ordinaire de son unité principale, et réciproquement. — Opérations fondamentales sur les nombres complexes. — Méthode des parties aliquotes.

560. Un nombre complexe est composé de plusieurs espèces d'unités qui dépendent les unes des autres : l'*unité* INDÉPENDANTE s'appelle *unité principale*, et les autres qui en sont des subdivisions se classent en décroissant en 1re, 2e, 3e, etc., *sous-unités*.

Appelons *rapports de passage* les rapports de deux sous-unités *consécutives*, et *rapport de passage* COMPLET le nombre des plus faibles subdivisions nécessaires pour constituer une unité principale.

LEMME. *Le rapport de passage complet est le produit des rapports de passage partiels.*

Démonstration. Soient p, p', p'', p''', etc. les divers rapports de passage ; on a

1 unité principale $= p$. 1 sous-unité première.

1 sous-unité première $= p'$. 1 sous-unité seconde.

1 sous-unité seconde $= p''$. 1 sous-unité troisième.

1 sous-unité troisième $= p'''$. 1 sous-unité quatrième.

N de ces subdivisions donneront

$$A, B\ C\ D.... = \frac{N}{P} \text{ unités principales.}$$

Donc en règle :

Pour convertir un nombre complexe en un nombre fractionnaire de son unité principale, multipliez-en les unités principales par le premier rapport de passage ; à ce produit ajoutez les sous-unités premières du nombre ; multipliez la somme obtenue par le second rapport de passage, augmentez ce nouveau produit du nombre des sous-unités secondes entrant dans la composition du nombre complexe donné ; continuez ainsi à multiplier une somme obtenue par le rapport de passage suivant, et ajoutez au produit ainsi formé les sous-unités de l'ordre de ce rapport : la transformée demandée aura pour numérateur le dernier total obtenu et pour dénominateur le rapport de passage complet.

562. Problème ii. *Une fraction d'unité principale quelconque étant donnée, la transformer en un nombre complexe de cette unité.*

Soit $\frac{N}{D}$ la fraction donnée, et supposons $N > D$; s'il en était autrement c'est-à-dire si $N < D$, la première des opérations que nous allons indiquer ne pourrait être effectuée, et il faudrait immédiatement passer à la seconde.

N représentant des unités principales, si nous divisons N par D, le quotient entier A exprimera nécessairement des unités principales, et le reste R converti en sous-unités premières donnera Rp ; on raisonnera sur Rp comme sur N, et l'on divisera Rp par D, ce qui donnera pour quotient entier B, le nombre *cherché* de sous-unités premières ; on aura ainsi un reste R', que l'on multipliera par p', et ainsi de suite. On peut donc dire que :

Pour évaluer en nombre complexe une fraction d'unité principale donnée, il faut en extraire les entiers, convertir le reste en sous-unités premières, diviser le résultat de cette conversion par le dénominateur donné, et continuer ainsi par division jusqu'à ce que l'on ait épuisé la série des subdivisions de l'unité principale proposée.

563. Opérations fondamentales sur les nombres complexes.

Pour additionner des nombres complexes, disposez-les verticalement les uns en dessous des autres en autant de colonnes qu'ils possèdent d'espèces d'unités; additionnez partiellement dans chaque colonne en n'inscrivant en total que le résidu de la somme par le rapport de passage correspondant pour reporter le quotient aux unités de l'espèce immédiatement supérieure.

Pour soustraire des nombres complexes, soustrayez partiellement dans chaque espèce d'unité, en allant des plus faibles subdivisions à l'unité principale; si a priori *l'une de ses soustractions est impossible augmentez-en le diminuende du rapport de passage de même ordre, et ajoutez 1 au diminueur d'espèce immédiatement supérieure.*

Quant à la multiplication et à la division, nous distinguerons deux cas :

1° Celui d'*un multiplicateur ou d'un diviseur* entier, le résultat devant avoir la même unité principale que le multiplicande ou que le dividende. Comme on multiplie un nombre par un autre en multipliant chacune des parties par cet autre pour additionner les divers produits partiels, on comprendra aisément la règle :

On multiplie un nombre complexe par un nombre entier en opérant partiellement sur chaque espèce d'unité, en allant de droite à gauche, n'inscrivant pour chacun que le résidu du produit partiel par le rapport de passage correspondant, et

reportant en unités immédiatement supérieures le quotient entier de cette division.

On divise un nombre complexe par un nombre entier en opérant partiellement à partir de l'unité principale; le quotient de chaque division partielle fournit les unités de son espèce du quotient demandé; le reste est traduit en sous-unités immédiatement inférieures et, réuni à celles de même espèce du dividende, est divisé par le diviseur; et ainsi de suite.

—

MÉTHODE DES PARTIES ALIQUOTES.

564. Le calcul des nombres complexes a complètement perdu l'importance qu'on lui avait trop complaisamment accordée; cependant il offre une méthode particulière de calcul qui est un exercice *très-utile de décomposition* et de *manipulation numériques.*

Ce procédé, qui est celui des parties aliquotes, consiste à calculer d'abord d'une manière facile un certain produit, pour en décrire, par une série de divisions qui n'exigent pas de calcul et dont les quotients s'inscrivent immédiatement, les diverses parties d'un produit, que l'on demande, et qu'une simple addition fournit ensuite.

Nous entendons ici plus particulièrement par *partie aliquote* d'un nombre toute fraction de ce nombre, ayant 1 pour numérateur.

La méthode des parties aliquotes consiste à décomposer les sous-unités de l'un des facteurs en parties aliquotes, soit de l'unité principale, soit de sous-unités supérieures à celles que l'on considère, soit encore en parties aliquotes les unes des autres; de façon que chaque produit partiel s'obtienne à l'aide de ceux déjà calculés en prenant une fraction facile à déterminer MENTALEMENT.

Un exemple numérique pouvant seul faire comprendre le détail de ce genre de calcul, soit

Problème. *Ayant acheté* $\overset{l}{71} — \overset{m}{1} — \overset{on}{5} — \overset{gr.}{3} — \overset{grs.}{57}$ *d'une substance à* $\overset{l}{18} — \overset{s}{17} — \overset{d}{9}$ *la livre, combien devra-t-on payer pour cet achat.*

L'unité du produit étant la *livre marc;* prenons donc $\overset{l}{18} — \overset{s}{17} — \overset{d}{9}$ pour multiplicande.

Les rapports de passage partiels du multiplicande sont 20, 12; ceux du multiplicateur sont 2, 8, 8, 72.

$$\overset{l}{18} — \overset{s}{17} — \overset{d}{9}$$
$$\overset{l}{71} — \overset{m}{1} — \overset{on}{5} — \overset{g}{3} — \overset{grs}{57}$$

18				produit par $\overset{l}{71}$
126				
35 —	10 —	0	—	$\overset{s}{10}$
17 —	15 —	0	—	$\overset{s}{5}$
7 —	2 —	0	—	$\overset{s}{2}$
1 —	15 —	6	—	$\overset{d}{6}$
0 —	17 —	9	—	$\overset{d}{3}$
9 —	8 —	10 $\frac{1}{2}$	—	$\overset{m}{1}$
4 —	14 —	5 $\frac{1}{4}$	—	$\overset{on}{4}$
1 —	3 —	7 $\frac{5}{16}$	—	$\overset{on}{1}$
0 —	5 —	10 $\frac{53}{64}$	—	$\overset{g}{2}$
0 —	2 —	11 $\frac{53}{128}$	—	$\overset{g}{1}$
0 —	0 —	3 $\frac{1077}{1152}$	—	$\overset{grs}{8}$
0 —	1 —	11 $\frac{39}{64}$	—	$\overset{grs}{48}$
0 —	0 —	0 $\frac{4535}{9216}$	—	$\overset{gr}{1}$
1356 —	18 —	4 $\frac{3141}{9216}$		

On aura d'abord à effectuer les produits

$$\overset{l}{18}.71\,,\ \overset{s}{17}.71\,,\ \overset{d}{9}.71$$

On formera le premier de ces produits comme à l'ordinaire; quant au second, on remarquera que 17 étant égal à 10+5+2, on a

$$\overset{s}{17}.71 = 71.\overset{s}{10} + 71.\overset{s}{5} + 71.\overset{s}{2}$$

Mais 10^s étant la moitié d'une *livre tournois*, il suffira de prendre la moitié de 71 pour avoir le produit 71.10^s; dès lors, comme 5 et 2 sont respectivement la moitié et le cinquième de 10^s, après avoir obtenu, comme nous venons de le dire, le produit par 10^s, on le divisera d'abord par 2, puis par 5, et l'on aura les produits par 5^s et par 2^s.

Pour former le produit 71.9^d, décomposons 9 en 6 + 3, et si nous nous rappelons que le sou vaut 12 *deniers*, nous concevrons que le produit par 6 deniers est le $\frac{1}{4}$ du produit par 2 sous, déjà trouvé.

Pour multiplier par les *deuxième sous-unités* du multiplicateur, il suffit (1 marc étant la moitié de 1^l) de prendre la moitié du multiplicande, ce qui donne le produit

$$\overset{l}{9} - \overset{s}{8} - \overset{d}{10}\tfrac{1}{2}$$

4 onces = $\frac{1}{2}$ marc, donc la moitié de ce dernier produit fournit celui qui correspond à 4 onces, que l'on divise ensuite par 4 pour avoir le produit par 1 once.

On obtient ainsi

$$\overset{l}{1} - \overset{s}{3} - \overset{d}{7}\tfrac{3}{4}$$

nombre que l'on divisera par 4 pour trouver le produit par 2^{gros}, attendu que 2 gros est le $\frac{1}{4}$ de 1 once; divisant le quotient par 2 on aura le produit par 1 gros.

Le gros vaut 72 grains ; donc en divisant par 9 le produit par 1 gros on aura celui par 8 grains, qui multiplié par 6 donne le produit par 48 *grains ;* enfin le produit par 1 grain s'obtient en divisant par 8 celui par 8 grains, déjà obtenu.

La somme de tous les produits partiels donne

$$1356^{l} — 18^{s} — 4^{d}\,\frac{3141}{9216}$$

pour produit cherché.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

Méthode générale de réduction à l'unité. — Grandeurs directement ou inversement proportionnelles. — Intérêt de l'argent, simple ou composé. — Règle d'intérêt simple. — Escompte; en dedans et en dehors; choix à faire pour une même somme, entre l'escompte en dedans, et l'escompte en dehors pour des taux différents. — Du change; réel, nominal. — Règle de société. — Règle d'alliage. — Titre des métaux. — Règle d'intérêts composés, formule générale. — Taux de capitalisation, formule générale. — Intérêts composés instantanés. — Des annuités, dans le cas où la capitalisation a lieu à des intervalles égaux ou inférieurs à une année. — Généralités sur les tables de mortalité; vie moyenne, vie probable; tables. — Rentes viagères sur une, ou plusieurs têtes; tontines, caisses d'épargne, de prévoyance, de retraite; caisse des veuves.

565. Une classe très-étendue de problèmes se résout par la *méthode* dite *de réduction à l'unité:* cette méthode est due au baron *Reynaud.*

Dans un problème, on trouve toujours diverses espèces ou natures de grandeurs dont les liaisons permettent de distinguer deux suites : l'une *entièrement* connue, l'autre renfermant un ou plusieurs termes inconnus dont la détermination est l'objet du problème ; les termes de ces deux séries se correspondent, et influent par voie factorielle dans un sens ou dans l'autre sur la solution.

Après avoir noté, dans la série connue, l'*espèce de l'inconnue*, la solution par réduction à l'unité consiste à réduire à l'unité dans *chacune des* AUTRES *grandeurs;* pour cela il faut apprécier avec attention la variation à faire subir à l'espèce de l'inconnue, lorsque l'on change successivement chaque autre nature par le passage à l'unité.

On transforme ainsi le problème en un autre dans lequel la série inconnue est restée la même, mais dont la série connue a 1 pour chacun de ses termes, excepté pour l'espèce de l'inconnue : on passe ensuite et successivement de proche en proche de cette nouvelle partie connue aux éléments ou termes de la série inconnue primitive; ce retour aux conditions de la question donne la solution pour dernière variation.

Pour mettre dans tout son jour ce que cette exposition générale pourrait avoir de trop abstrait, il est indispensable de s'aider d'un exemple.

PROBLÈME. *Cinquante deux ouvriers en travaillant 9 heures par jour pendant 10 jours avec une force représentée par 343, dans un terrain dont la dureté est 8, ont creusé 6 fossés ayant chacun 45 mètres de longueur sur 7 de largeur et sur 4 de profondeur : on demande quelle serait la force nécessaire à 57 ouvriers pour creuser 4 fossés de 76 mètres de longueur chacun sur 18 de largeur et sur 3 de profondeur lorsque la dureté du terrain est 6 et qu'ils travaillent 7 heures par jour pendant 14 jours.*

Le tableau suivant indique le détail de toutes les parties de la solution.

TRAVAIL.			FOSSÉS.				Difficulté.	FORCE.
Nombre d'ouv.	Jours.	Heures.	Nombre.	Long.	Larg.	Profond.		
52	10	9	6	45	7	4	8	343
1	10	9	6	45	7	4	8	343.52
1	1	9	6	45	7	4	8	343.52.10
1	1	1	6	45	7	4	8	343.52.10.9
1	1	1	1	45	7	4	8	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9}{6}$
1	1	1	1	1	7	4	8	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 45}$
1	1	1	1	1	1	4	8	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 45 \cdot 7}$
1	1	1	1	1	1	1	8	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4}$
1	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	1	1	1	1	1	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	1	1	1	1	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	1	1	1	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	1	1	76	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	1	4	76	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76 \cdot 4}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8}$
1	1	7	4	76	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76 \cdot 4}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7}$
1	14	7	4	76	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76 \cdot 4}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 14}$
57	14	7	4	76	18	3	6	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76 \cdot 4}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 57}$

Le problème renfermant 8 grandeurs ou espèces différentes. sans compter l'inconnue, est successivement transformé en 16 autres problèmes dont le dernier est celui qui est proposé ; deux quelconques *consécutifs* de ces problèmes sont composés des mêmes éléments excepté par rapport à une seule grandeur dans laquelle a lieu le passage de l'un à l'autre. Ce passage détermine dans la nature de l'inconnue, une variation par multiplication ou par division ; et c'est cette variation qu'il est si important de bien saisir : un sens droit, une saine logique suffisent à cet égard.

Pour passer du premier de ces problèmes au 2e, on dit :

Si 52 ouvriers, placés dans certaines conditions et pour l'exécution d'un certain ouvrage, avaient à déployer une force représentée par 343, 1 seul ouvrier dans les mêmes conditions, devrait avoir une force 52 fois plus forte, ou 343.52

Du second au troisième état de la question, on dirait :

Si en 10 jours, et dans des conditions déterminées, la force nécessaire est 343.52, en un jour pour obtenir le même résultat la force devrait être 10 fois plus grande, c'est-à-dire 343.52.10

Et ainsi de suite.

De proche en proche on obtient ainsi pour résultat

$$\frac{343.52.10.9.6.3.18.76.4}{6.45.\ 7.4.8.7.14\ 57} = 468$$

Le dispositif qui précède est long et nous ne le conseillons guère ; nous proposons le suivant qui est beaucoup plus simple, et qui permet d'écrire le problème numériquement sous la dictée : c'est sur les deux termes d'une seule fraction placée dans la colonne inconnue à l'ordre de l'espèce de l'inconnue, que l'on *indique* les variations correspondantes aux différentes phases contenues dans le tableau analytique de la solution.

Eléments du problème.		Partie connue.	Partie inconnue.
Nombre d'ouvriers.		52	57
Jours de travail.		10	14
Heures quotidiennes.		9	7
Fossés.	Nombre.	6	4
	Longueur.	45	76
	Largeur.	7	18
	Profondeur.	4	3
Dureté du terrain.		8	6
Force.		343	$\frac{343 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 76 \cdot 4}{6 \cdot 45 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 37}$

366. Lorsque deux grandeurs sont liées de manière que les valeurs de la première sont dans le même rapport que les valeurs correspondantes de la seconde, on dit que ces grandeurs sont *proportionnelles* l'une à l'autre ; elles sont *inversement proportionnelles* si le rapport de deux valeurs quelconques de l'une est inverse de celui des valeurs correspondantes de l'autre.

—

RÈGLES D'INTÉRÊT.

367. On appelle INTÉRÊT *d'un capital* la valeur en argent des avantages ou bénéfices que l'on a pu obtenir par l'emploi de ce capital pendant un temps déterminé ; cet emploi peut du reste être fait par le propriétaire ou par celui auquel le capital est prêté : dans ce dernier cas, l'intérêt doit être considéré comme représentant le bénéfice qu'eut pu faire directement le propriétaire en faisant lui-même fonctionner son argent. Dans un cas comme dans l'autre, l'intérêt est le *profit* que peut donner un capital.

L'intérêt que l'on appelle parfois *rente* est évidemment

proportionnel à la somme placée : pour opérer uniformément on a adopté une *unité d'intérêt*, en fixant ou en déterminant l'intérêt de la somme *constante* de 100 francs placée pendant un an.

On appelle *taux d'intérêt*, ou *taux pour cent* l'intérêt de 100 francs en 12 mois; ainsi si 100 francs donnent annuellement 5, 6, 7, etc. francs d'intérêt, on dit que le capital est placé à 5, 6, 7, etc. francs pour 100; d'une manière abrégée, si i est le taux, on écrit i %

568. Le prêt d'un capital peut être fait de deux manières très-différentes : ou bien 1° Les intérêts échus sont remboursables à des époques déterminées par le contrat de prêt ; ces époques sont équidistantes et leur intervalle s'appelle *unité de temps*. — L'opération est alors faite à *intérêt* SIMPLE.

2° Les intérêts échus sont réunis au capital, après chaque unité de temps, pour former un nouveau capital produisant intérêt pendant l'unité de temps suivante. — L'opération est ainsi faite à *intérêts* COMPOSÉS.

Nous nous occuperons d'abord des intérêts simples.

—

INTÉRÊTS SIMPLES.

569. Le calcul de l'intérêt simple repose sur ce principe fondamental:

Pour un même temps, le rapport des capitaux est égal à celui des intérêts; et pour des temps égaux, les intérêts sont dans le même rapport que les temps de placement.

Dans toute question d'intérêt simple désignons par :

C le capital placé.

t la durée du prêt (cette durée est évaluée en mois).

i le taux p. % .

p l'intérêt ou le produit à la fin du temps t.

Problème. *De ces quatre éléments, trois étant donnés, déterminer le quatrième :* tel est l'énoncé le plus général d'une question d'intérêt simple.

A moins qu'on n'en convienne expressément le temps t est exprimé en *mois*, et l'intérêt calculé mensuellement; du reste, et pour toute hypothèse différente il suffirait de changer deux facteurs constants.

Par *réduction à l'unité*, et pour déterminer l'intérêt p, on aura le tableau résumé des calculs

Eléments du probl.	Partie connue.	Partie inconnue.
Somme prêtée.	100	C
Temps	12	t
Intérêt.	i	$\frac{C.i.t}{1200}$

On a donc cette seule égalité, *facile* à retenir,

$$1200.p = C.i.t$$

Et selon que p, t, i, C sont inconnues, on obtient

$$p = \frac{C.i.t}{1200}$$

$$t = \frac{1200.p}{C.i}$$

$$i = \frac{1200.p}{C.t}$$

$$C = \frac{1200.p}{i.t}$$

Ces formules suffisent pour résoudre les quatre problèmes auxquels donnent lieu les questions d'intérêt simple.

557. Lorsque l'on calcule l'intérêt par jour, on considère l'année comme composée de 360 jours; alors on fait usage d'un calendrier spécial appelé *calendrier de banque*, et la formule générale précédente se change en

$$36000\,p = C.i.t$$

Si t était exprimée en années, on ferait usage de

$$100\,p = C.i.t$$

571. Il arrive souvent que la question proposée renferme le total connu des intérêts et du capital.

Représentons ce total par S et dans la formule du n° 569, posons $P = S - C$; il viendra :

$$1200\,(S - C) = C\,i.t\,,$$
$$1200\ S = C\,(1200 + it)$$

On en déduirait aisément C, i ou t.

—

RÈGLES D'ESCOMPTE.

572. Une somme étant payable à une certaine époque, si le débiteur acquitte avant l'échéance, il a le droit de faire sur le montant de cette somme une retenue qui porte le nom d'*Escompte*.

On escompte de deux manières.

L'*Escompte est en dedans* lorsqu'il est égal aux intérêts de la somme payée; l'*escompte est en dehors* lorsqu'il est égal aux intérêts de la somme souscrite, pendant le temps dont on anticipe le payement.

PROBLÈME I. *Escompter* EN DEDANS *à* t *mois et à* i °/₀, *une somme de* B *frs.*

L'escompte en dedans étant égal aux intérêts de la valeur payée, il est clair que B doit être considéré comme le total des intérêts et de la valeur actuelle V du billet; dès lors la formule (n° 571) donnera

$$1200 \,.\, B = V\,(1200 + it)$$

D'où

$$V = \frac{1200}{1200 + it}\, B \;.\;.\;.\;. \qquad (1)$$

PROBLÈME II. *Escompter en* DEHORS *à* t *mois et à* i °/₀ *une somme de* B frs.

Puisque l'intérêt de 100 frs en t mois est égal à $\frac{i\,t}{12}$, par escompte en dehors sur 100 on ne touchera que $100 - \frac{i.t}{12}$; B frs auront donc pour valeur V' actuelle :

$$V' = \frac{B}{100}\left(100 - \frac{it}{12}\right) \;.\;.\;.\;. \qquad (2)$$

573. *Comparaison des deux manières d'escompter.* Cherchant la différence Δ des valeurs actuelles de B, en dedans et en dehors, il vient :

$$\Delta = B\,\frac{1200}{1200 + it} - \frac{B}{100}\left(100 - \frac{it}{12}\right)$$

et

$$\Delta = \frac{B}{1200} \cdot \frac{i^2 t^2}{1200 + it} \;.\;.\;.\;. \qquad (3)$$

Puisque V est la valeur *réelle* actuelle du billet, on aura

$$\text{intérêts de } B = B - \frac{1200\,B}{1200 + it} = \frac{B\,i\,t}{1200 + it} \;.\;.\;.\;. \qquad (4)$$

La formule (n° 369) fournira :

$$\text{Intérêt des intérêts de B} = \frac{it}{1200} \cdot \frac{B\,i\,t}{1200+it} \quad \ldots \quad (5)$$

Les seconds membres des relations (3) et (5) étant égaux, on en conclut

$$\Delta = \text{Intérêt des intérêts de B.}$$

Il est donc établi qu'*en escomptant en dehors le banquier retient* SANS AUCUN DROIT, *non seulement l'intérêt du capital souscrit, mais encore l'intérêt des intérêts de ce capital.*

PROBLÈME. De deux billets, l'un de B frs à t mois et à i °/₀ en dedans, l'autre de B' frs à t' mois et à i' °/₀ en dehors, lequel est le plus avantageux au débiteur ?

On a eu

$$V = B.\frac{1200}{1200+it}, \quad V' = \frac{B'}{100}\left(100 - \frac{i't'}{12}\right)$$

D'où

$$\frac{V}{V'} = \frac{\overline{1200}^2}{(1200+it)\,(100-i't')} \cdot \frac{B}{B'}$$

La fraction qui multiplie $\frac{B}{B'}$ permet de décider lequel des deux billets est le plus avantageux au débiteur, en cas de payement anticipé.

—

DE LA TARE.

374. On appelle *tare* ce qui reste du poids d'une expédition quand on soustrait le *poids net*, ou réel, de la marchandise du poids brut, c'est-à-dire enveloppes et caisses comprises.

Elle se calcule à tant pour 100 en dedans ou en dehors comme l'Escompte ; les éléments de son calcul dépendent de l'espèce de marchandise et émanent de la place d'expédition.

DU CHANGE.

575. Les peuples commencent à comprendre quel serait le bienfait d'un système universel unique de poids, de mesures et de monnaies, pour autant bien entendu que ce système soit en rapport immédiat avec le système décimal de numération adopté par le monde civilisé.

En 1860 un Congrès européen devait se réunir à Bruxelles pour délibérer sur l'opportunité de l'adoption d'un pareil système ; des circonstances politiques ont sans doute retardé la réunion de ce congrès.

Nous supposons un instant que tous les peuples aient la même unité monétaire, par exemple le *gramme d'argent fin*, ou même sans aller aussi loin, que le rapport de chaque unité monétaire au gramme d'argent fin, soit invariablement fixé.

Nous appelons *change réel* le rapport entre les valeurs d'échange d'un même poids d'argent fin en des lieux différents; il est clair que les frais de ce change ne peuvent excéder les frais de transport de ce poids de monnaie d'un lieu à l'autre, lorsque le commerce est libre entre ces places commerciales, ou les frais de transport augmentés des droits de douane, lorsque des lois entravent la circulation du numéraire.

Mais aujourd'hui les opérations commerciales ont lieu sans transport réel d'argent, et l'on appelle *change nominal* ou simplement *change* le droit de commission que prélève un banquier sur les lettres ou billets de change que l'on veut recevoir ou faire servir par son intermédiaire, comme payement en un lieu déterminé.

Le change varie par suite d'une foule de circonstances et de causes dont le détail et l'examen ne peuvent trouver place ici; le calcul de ce prélèvement s'opère à certains taux de

change variant d'une place commerciale à l'autre, et l'on suit à cet égard le mode des opérations relatives aux intérêts simples.

—

RÈGLE DE SOCIÉTÉ.

576. La règle de *Société* ou de *partage* sert à répartir entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte qui résulte de leur association, ou plus généralement, *à partager un nombre proposé, en un nombre déterminé de parties qui aient entr'elles des rapports donnés.*

Il est en effet bien rare que tous les associés se trouvent dans les mêmes conditions : le capital apporté par chacun d'eux, le temps pendant lequel ce capital est resté dans l'entreprise commune, sont deux éléments principaux qui doivent nécessairement amener une inégale répartition du bénéfice ou de la perte.

Le fond fourni par chaque associé s'appelle *mise, action* ou *fournissement;* le fond total, ou la somme des mises, est le *capital social,* et le bénéfice à partager se nomme le *dividende* GÉNÉRAL; la cote part de chaçun est un *dividende* PARTIEL.

577. Le partage du gain ou de la perte repose évidemment sur :

LEMME I. *Pour des temps égaux, les bénéfices ou les pertes ont le même rapport que les mises correspondantes.*

C'est-à-dire que si deux associés ont fait travailler leurs mises inégales pendant le même temps, leurs bénéfices ou leurs pertes seront *doubles*, *triples*, *quadruples*, etc., selon que leurs mises seront elles-mêmes et respectivement *doubles, triples*, *quadruples*, etc.

LEMME II. *Pour des mises égales les bénéfices ou les pertes ont même rapport que les temps d'action de ces mises.*

Ce qui signifie que si des mises égales sont restées dans l'association pendant des temps *doubles*, *triples*, *quadruples*, etc., l'un de l'autre, les bénéfices ou les pertes correspondants seront eux-mêmes *doubles*, *triples*, *quadruples*, etc.

THÉORÈME. *Pour des mises et pour des temps quelconques, les dividendes partiels ont le même rapport que les produits de chaque mise par le temps d'action correspondant.*

Démonstration. Considérons les deux mises m et m', leurs temps de travail t et t', leurs profits ou pertes v et v'; considérons auxiliairement, mais momentanément, une autre mise m dont le temps de travail est t' et le profit ou la perte v''.

D'après le *lemme I*, on a

$$\frac{v}{v''} = \frac{t}{t'}$$

Le *lemme II* fournit aussi

$$\frac{v''}{v'} = \frac{m}{m'}$$

La multiplication de ces deux égalités fractionnaires conduit à :

$$\frac{v}{v'} = \frac{m \, . \, t}{m' . t'} \qquad (c.q.f.d.)$$

578. PROBLÈME I. *Deux particuliers ont mis en commun, le premier* m *frs pendant* t *mois, le second* m' *frs pendant* t' *mois; on demande de répartir entr'eux le dividende* b.

Soient v et v' les parts inconnues des deux associés, on a en vertu du théorème précédent, l'égalité :

$$\frac{v}{v'} = \frac{mt}{m't'}$$

Le principe (n° 233) fournit :

$$\frac{v+v'}{mt+m't'} = \frac{v}{mt} = \frac{v'}{m't'}$$

D'où puisque $v+v'=b$,

$$v = \frac{b\,m\,t}{mt+m't'} \quad , \quad v' = \frac{b'm't'}{mt+m't'}$$

579. Problème ii. *Quatre négociants ont fait une mise de fonds de* C *frs, on désire connaître leurs mises sachant que leurs dividendes respectifs sont* v, v', v'', v'''.

En représentant par b la somme $v+v'+v''+v'''$, on a (lemme i, n° 577) :

$$\frac{m}{C} = \frac{v}{b} \quad , \text{ d'où } m = \frac{C}{b}.v$$

De même on aurait

$$m' = \frac{C}{b}\cdot v'$$

$$m'' = \frac{C}{b}\cdot v''$$

$$m''' = \frac{C}{b}\cdot v''' \qquad \textit{c q.f.d.}$$

580. Probleme iii. *Quatre négociants constituent pour* m *mois en association le capital* C *frs; et touchent pour dividendes* v, v', v'', v''' *frs; on demande leurs mises, sachant que le second s'est retiré après* t' *mois, le troisième après* t'' *et le quatrième après* t''' *mois.*

Le théorème (n° 577) donne

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{v}{v'} = \dfrac{m\,t}{m't'} \\[2ex] \dfrac{v}{v''} = \dfrac{m\,t}{m''t''} \\[2ex] \dfrac{v}{v'''} = \dfrac{m\,t}{m'''t'''} \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m'}{m} = \dfrac{t}{v} \cdot \dfrac{v'}{t'} \\[2ex] \dfrac{m''}{m} = \dfrac{t}{v} \cdot \dfrac{v''}{t''} \\[2ex] \dfrac{m'''}{m} = \dfrac{t}{v} \cdot \dfrac{v'''}{t'''} \end{array}\right.$$

A ces dernières expressions si l'on joint l'égalité,

$$\frac{m}{m} = 1$$

il viendra par l'addition, membre à membre :

$$\frac{m + m' + m'' + m'''}{m} = \frac{t}{v}\left(1 + \frac{v'}{t'} + \frac{v''}{t''} + \frac{v'''}{t'''}\right)$$

C étant le capital social $m + m' + m'' + m'''$, on en déduit

$$m = \frac{C\,v}{t\left(1 + \frac{v'}{t'} + \frac{v''}{t''} + \frac{v'''}{t'''}\right)}$$

De même,

$$m' = \frac{C\,v'}{t'\left(1 + \frac{v'}{t'} + \frac{v''}{t''} + \frac{v'''}{t'''}\right)}$$

$$m'' = \frac{C\,v''}{t'\left(1 + \frac{v'}{t'} + \frac{v''}{t''} + \frac{v'''}{t''}\right)}$$

$$m''' = \frac{C\,v'''}{t'''\left(1 + \frac{v'}{t'} + \frac{v''}{t''} + \frac{v'''}{t'''}\right)} \quad (c.q.f.t.)$$

RÈGLE D'ALLIAGE.

581. On donne le nom d'*alliage* au lingot qui résulte de la fusion de plusieurs métaux les uns avec les autres; et l'on appelle *mélange* la réunion intime, sans décomposition d'aucun élément, de plusieurs liquides ou de plusieurs graines.

La règle d'alliage s'applique à toutes les questions numériques relatives aux alliages et aux mélanges; ces questions portent sur la détermination :

1° *du prix du mélange ou de l'alliage, en fonction des quantités et des prix des éléments.*

2° *des quantités élémentaires, lorsque l'on en connaît les prix respectifs ainsi que le prix du composé.*

582. PROBLÈME I. *Combien faut-il ajouter d'une matière à* k *frs le kilogramme, avec* p *kilog. d'une matière de qualité inférieure à* a *frs le kilog., pour porter le prix du composé à* m *frs le kilogramme.*

Désignons par x le nombre cherché : il est évident que dans le composé l'augmentation de prix des p kilog. *primitifs* provient de la diminution de prix des x kilog. introduits de qualité supérieure.

Cette augmentation et cette perte ayant pour valeurs respectives $p\,(m-a)$ et $x\,(k-m)$, il viendra par expression d'égalité :

$$x\,(k-m) = p\,(m-a), \quad \text{d'où} \quad x = p\,\frac{m-a}{k-m}$$

583. PROBLÈME II. *Ayant deux qualités d'une matière à* a *et* k *frs le kilogramme, on demande combien il faut prendre de l'une et de l'autre pour faire un composé de* V *kilogrammes à* m *frs le kilogramme.*

1re SOLUTION. Supposons $k > a$; il est clair qu'en prenant

1 kilog. à a on est en-dessous de $m—a$ frs et qu'en prenant 1 kilog à k on est, au contraire, au-dessus du prix voulu de $k—m$ frs. Un composé auxiliaire et transitoire

de $k—m$ kilogrammes à a frs
et de $m—a$ kilogrammes à k frs

donnerait

par *défaut* $(k—m)$ $(m—a)$ frs
par *excès* $(m—a)$ $(k—m)$ frs

Ce composé, qui contient évidemment $k—a$ kilog. est au prix de m frs, puisqu'il y a égalité entre les prix par excès et par défaut de ses éléments; ce prix est ainsi m $(k—a)$.

Actuellement nous dirons :

Si dans un composé de $k—a$ kilogs, il y a

$$k—m \text{ à } a \quad \text{et} \quad m—a \text{ à } k$$

Dans un composé de 1 kilog., et sous les mêmes conditions, il entre

$$\frac{k—m}{k—a} \text{ à } a \quad \text{et} \quad \frac{m—a}{k—a} \quad \text{à} \quad k.$$

Toutes autres choses égales d'ailleurs, pour former le composé demandé de V kilogrammes, on devra prendre

$$\frac{k—m}{k—a} \cdot \text{V à } a \quad \text{et} \quad \frac{m—a}{k—a} \cdot \text{V à } k$$

Cette solution, que nous croyons nouvelle, est *directe*.

584. 2e SOLUTION. *Par compensation*. Si l'on considère les v kilogs à a, il y aura une *erreur par défaut* de

$$(m—a)\ v$$

Pour détruire cette erreur il faut remplacer un certain nombre inconnu y de fois, 1 kilog. à a par 1 kilog. à k;

or une seule de ces substitutions augmente la valeur du composé de $k-a$ frs; donc y est le quotient de $(m-a)$ V par $k-a$; c'est-à-dire que

$$y = \frac{m-a}{k-a} \cdot V$$

On trouverait de même par un raisonnement analogue,

$$z = \frac{k-m}{k-a} \cdot V$$

Cette compensation de calcul est un heureux artifice ; mais elle n'est pas à conseiller comme principe.

—

TITRE DES MÉTAUX.

585. Les ouvrages d'or et d'argent ne sont jamais formés de métal pur, dont ils contiennent une plus ou moins grande partie.

La masse totale du lingot destiné à la fabrication est divisée en millièmes, et le nombre de millièmes de métal pur entrant dans l'unité de masse, a reçu le nom de *titre* du lingot proposé.

Sans évaluation de quantité, le métal pur d'un lingot en est la *partie de fin*, ou simplement le *fin*.

Les questions relatives au titre des métaux sont du ressort de la règle d'alliage.

Voici le cas *le plus simple* et *le plus fréquent :*

Problème. *Un orfèvre a* N *kilogrammes au titre de* t *millièmes; on désire connaître combien il doit ajouter d'or pur pour élever le titre à* T *millièmes?*

Chaque kilogramme devant être porté au titre supérieur T, gagnera

$$\frac{T-t}{1000}$$



La masse N s'augmentera donc de

$$\frac{T-t}{1000} \cdot N \qquad (1)$$

Or cette augmentation est égale à la diminution que les x kilogrammes d'or pur subissent par leur alliage avec N, et en descendant du titre de 1000 millièmes à celui de T millièmes ; on a donc

$$x \cdot \frac{1000-T}{1000} = \frac{T-t}{1000} \cdot N$$

D'où

$$x = N \cdot \frac{T-t}{1000-T}$$

Exemple. Soient $N = 35$, $t = 930$, $T = 950$; il viendra

$$x = 35 \cdot \frac{20}{50} = 14$$

—

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

586. Tant que le capital reste entre les mains de l'emprunteur, le prêteur reçoit chaque année, l'intérêt qui lui est dû; dans l'opération ainsi faite, et qui est à intérêt simple, le bénéfice échu n'est jamais joint au capital pour produire de nouveaux intérêts.

Mais lorsque les intérêts se joignent au capital après chacune des périodes stipulées pour produire de nouveaux intérêts, le prêt revêt une forme différente qui est celle des ***intérêts composés***, ou ***intérêt d'intérêts*** : cette dénomination est excellente parce qu'elle fait bien comprendre que pendant la seconde période l'intérêt agit, non seulement sur le capital prêté effectivement, mais aussi sur les intérêts de ce capital pendant la première période de placement ; après cette seconde pé-

riode un nouveau capital, fonctionnant pendant la troisième, s'accroît de ses intérêts pendant ce temps pour se présenter à la période suivante ; et ainsi de suite.

En matière d'intérêt composé, il est indispensable que le contrat de prêt indique l'étendue de la période après laquelle la *capitalisation* doit se faire ; car les intérêts échus sont au profit du banquier après chaque période : dans un prêt à intérêt composé, effectué sans *fixation expresse* d'époque de capitalisation, l'emprunteur aurait donc le *droit* de ne *capitaliser* les intérêts qu'à la fin de chaque année.

Lorsque le prêteur voudra capitaliser à des époques différentes, il devra *stipuler dans le contrat de prêt* l'étendue de la période ; c'est ainsi que l'on prescrit de capitaliser semestriellement, trimestriellement, mensuellement ; on pourrait aussi l'exiger par semaine et par jour.

587. Quatre éléments existent encore dans ce genre de question, et l'un d'entr'eux doit être déterminé en fonction des trois autres : ces éléments sont le capital prêté C, le taux annuel i d'intérêt, la durée t du prêt, et la valeur P complète de C à l'époque fixée. — Supposons que t représente un nombre d'années, et *cherchons la relation qui existe entre* C, i, t, P.

Soient C_1, C_2, etc... C_t les valeurs acquises après capitalisation au bout de la première, deuxième, etc. ... t^e année ; il est clair que l'on aura cette suite d'égalité

$$C_1 = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

$$C_2 = C_1\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

$$\vdots$$

$$C_{t-1} = C_{t-2}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

$$C_t = P = C_{t-1}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

Par la multiplication, membre à membre, de ces relations et en remarquant que le premier nombre de chaque égalité disparait comme facteur du second membre de l'égalité suivante, il viendra

$$P = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t \qquad (1)$$

Cette relation conduit à celles qui correspondent aux éléments C, i ou t considérés comme inconnues.

$$C = \frac{P}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t}, \ \log C = \log P - t \log\left(1 + \frac{i}{100}\right) \qquad (2)$$

$$t = \frac{\log P - \log C}{\log\left(1 + \frac{i}{100}\right)} \qquad (3)$$

$$\log\left(1 + \frac{i}{100}\right) = \frac{\log P - \log C}{t} \qquad (4)$$

588. Taux de capitalisation. Lorsque l'époque de capitalisation n'est pas annuelle, on suit, dans les opérations financières et industrielles, un mode de calcul qui *constitue au préjudice de l'emprunteur*, une grave erreur.

Soit encore i le taux annuel d'intérêt simple, n le nombre de périodes annuelles, et x le taux d'intérêt simple correspondant à chaque période ; on pose

$$x = \frac{i}{n}$$

C'est en cela que consiste l'erreur contre laquelle il convient de s'élever avec force et dont un exemple préalable fera comprendre l'importance : considérons la somme de 100 francs placés à 5 °/₀, à intérêts composés et à 6 mois de capitalisation.

On croit que la somme de 100 frs produit frs 2,50 pendant les six premiers mois; mais, s'il en était ainsi, à la fin du premier semestre le capital emprunté serait devenu 100+2,50 et donnerait pendant le second semestre

1° Intérêt de 100 frs en 6 mois = 2,50

2° Intérêt de 2,50 frs en 6 mois = 0,0625

En ajoutant à ces deux intérêts les 2,50 frs produits pendant la première période, on en conclurait que

100 frs en 12 mois auraient produit frs 5,0625

Et l'on voit, que contrairement aux stipulations du contrat, le *taux* POUR CENT *annuel* serait supérieur à 5; sur chaque centaine de frs le banquier prélève donc *en trop* 6 $\frac{1}{4}$ cent.

Une observation analogue est à présenter pour un taux quelconque; toutes les tables relatives aux calculs d'intérêts composés, ou dépendant de ces calculs, sont donc erronées.

589. Procédant d'une manière générale, *cherchons le taux de capitalisation relatif à un taux pour cent donné et à une période déterminée*.

Soit μ le taux de capitalisation ; $\frac{\mu}{100}$ sera l'intérêt de capitalisation de 1 franc pour une des n périodes; les différentes sommes produites pendant les n périodes n'étant exigibles, *à titre d'intérêt annuel*, qu'à la fin de chaque n^e période, il est clair que i devra être considéré comme le résultat que l'on obtient en plaçant à intérêt composé, à la fin de chaque période et *au taux* μ, une somme uniforme μ.

On aura donc

$$\mu\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n-1}+\mu\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n-2}\cdots+\mu\left(1+\frac{\mu}{100}\right)+\mu=i$$

D'où, en divisant par μ,

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n-2}+\ldots+\left(1+\frac{\mu}{100}\right)+1=\frac{i}{\mu}$$

Effectuant la somme des termes de la progression factorielle dont $1+\frac{\mu}{100}$ est la raison, nous aurons

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n}-1=\frac{i}{100}$$

D'où

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n}=\frac{100+i}{100} \qquad (a)$$

Exemple. 1° $i=5$, $n=2$, (capitalisation semestrielle)

$$2\log\left(1+\frac{\mu}{100}\right)=\log 1{,}05=0{,}0211893$$

$$\log\left(1+\frac{\mu}{100}\right)=0{,}0105946$$

$$1+\frac{\mu}{100}=1{,}02469\ldots,\ \mu=2{,}469\ldots$$

2° $i=5$, $n=4$ (capitalisation trimestrielle)

$$4\log\left(1+\frac{\mu}{100}\right)=\log 1{,}05=0{,}0211893$$

$$\log\left(1+\frac{\mu}{100}\right)=0{,}0052973$$

$$1+\frac{\mu}{100}=1{,}01227\ldots,\ \mu=1{,}227\ldots$$

Après avoir calculé dans chaque cas la valeur de μ, on fera usage de la formule (1) nº 587, dans laquelle i sera un nombre entier de périodes.

Supposons d'abord $n = 2$ et $t = 3\frac{1}{2}$ ans $= 7$ semestres, on aura

Méthode rigoureuse.	*Méthode ordinaire.*
$P = 100.(1,02469...)^7$	$P = 100.(1,025)^7$
$\log 100 = 2$	$\log 100 = 2$
$\log 1,02469... = 0,0105925$	$\log 1,025 = 0,01072386$
$6.\log 1,02469... = 0,0634650$	$6 \log 1,025 = 0,06434316$
$\log P = 2,0740575$	$\log P = 2,07506702$
$P = 118,59$	$P = 118,86...$

Il y a donc une différence, à charge de l'emprunteur, de 27 centimes.

En second lieu soient $n = 4$, $t = 3\frac{1}{2}$ ans $= 14$ trimestres ; on aura

Méthode rigoureuse	*Méthode ordinaire.*
$P = 100.(1,01227...)^{14}$	$P = 100.(1,0125)^{14}$
$\log 100 = 2$	$\log 100 = 2$
$\log 1,01227.. = 0,00529637$	$\log 1.0125 = 0,00539503$
$13.\log 1,01227.. = 0,06885281$	$13 \log 1,0125 = 0,07113539$
$\log P = 2,07414918$	$\log P = 2,07653042$
$P = 118,61759$	$119,26978..$

Il y a donc dans ce cas une différence d'au moins 65 cen-

times, et l'on comprend combien le préjudice causé à l'emprunteur croît avec le nombre de périodes annuelles de capitalisation.

590. *La différence* δ *entre le taux proportionnel* $\frac{i}{n}$ *et le taux de capitalisation par période* DIMINUE *lorsque* n *croît.*

Il est intéressant et utile de résoudre ce

PROBLÈME. *Que devient un capital prêté à intérêts composés au taux annuel* t, *lorsque la capitalisation s'effectue à chaque instant.*

Ces intérêts s'appellent alors *instantanés*.

Reprenons la formule (*a*) n° 589,

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^n=\frac{100+i}{100}$$

Posons

$$\delta=\frac{i}{n.100}-\frac{\mu}{100}$$

Il viendra

$$\left(1-\delta+\frac{i}{n.100}\right)^n=\frac{100+i}{100}$$

En considérant $1-\delta$ comme une seule quantité, la formule du binome de Newton (Algèbre), nous apprend que

$$\left(1-\delta+\frac{i}{n.100}\right)^n=(1-\delta)^n+\frac{n}{1}.(1-\delta)^{n-1}\frac{i}{n.100}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(1-\delta)^{n-2}\frac{i^2}{n^2.100^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(1-\delta)^{n-3}\frac{i^3}{n^3.100^3}$$

d'où

$$\left(1-\delta+\frac{i}{n.100}\right)^n=(1-\delta)^n+(1-\delta)^{n-1}.\frac{i}{n.100}$$

$$+\frac{1-\frac{1}{n}}{2}(1-\delta)^{n-2}\frac{i^2}{100^2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3}(1-\delta)^3\frac{i^3}{100^3}+\text{etc.}$$

Passons à la limite en supposant n illimité ; δ converge alors vers *zéro*, et $1-\delta$ vers l'unité dont toutes les puissances entières sont égales à 1 ; on aura donc

$$\text{limite}\left(1+\frac{u}{100}\right)^n = 1+\frac{i}{100}+\frac{1}{2}\,\frac{i^2}{100^2}+\frac{1}{2.3}\,\frac{i^3}{100^3}+\text{etc.}$$

ou, d'après une formule connue, e étant la base logarithmique népérienne,

$$\text{limite}\left(1+\frac{u}{100}\right)^n = e^{\frac{i}{100}}$$

A représentant la valeur acquise en 1 an par la somme de 100 frs, il viendra (n° 587) :

$$A = 100.e^{\frac{i}{100}} \qquad (b)$$

En représentant par t le temps du prêt, et par p le nombre de périodes annuelles $\frac{1}{n}$ que contient t, on aura

$$t = p\,.\,\frac{1}{n}$$

La formule (a, n° 589) donne

$$n \log\left(1+\frac{u}{100}\right) = \log\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

$$\log\left(1+\frac{u}{100}\right) = \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Multiplions cette dernière égalité par p,

$$p \log\left(1+\frac{u}{100}\right) = \frac{p}{n}\log\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

La propriété logarithmique exponentielle (nº 500) transforme cette relation en

$$\log\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p} = \log\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{p}{n}}$$

D'où

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p} = \left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{p}{n}}$$

Comme pour $\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{n}$, introduisons encore la quantité δ, et il viendra :

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p} = \left(1-\delta+\frac{i}{n.100}\right)^{p}$$

Le second membre se développe, par la formule binomiale, en

$$(1-\delta)^{p}+\left(\frac{1}{n}\,\frac{i}{100}\right)p(1-\delta)^{p-1}+\left(\frac{1}{n}\,\frac{i}{100}\right)^{2}\frac{p(p-1)}{1.2}\,(1-\delta)^{p-2}$$
$$+\left(\frac{1}{n}\,\frac{i}{100}\right)^{3}\frac{p(p-1)\,(p-2)}{1.2.3}(1-\delta)^{p-3}\;+\text{ etc.}$$

Les différents termes de cette série contiennent un facteur en i ; dégageant les puissances de $\frac{1}{n}$ que contiennent ces facteurs, on pourra écrire, en faisant passer les puissances de n comme diviseurs dans les autres facteurs de chaque terme :

$$(1-\delta)^{p}+\frac{i}{100}\,\frac{p}{n}\,(1-\delta)^{p-1}+\left(\frac{i}{100}\right)^{2}\frac{\frac{p}{n}\left(\frac{p}{n}-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}\,(1-\delta)^{p-2}$$
$$+\;\left(\frac{i}{100}\right)^{3}\frac{p\left(\frac{p}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{p}{n}-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}\,(1-\delta)^{p-3}+\text{ etc.}$$

Or quelque grands que soient n et p, $\frac{p}{n}$ est toujours égal à t dont l'unité est l'année ; de plus et en passant à la limite, c'est-à-dire en considérant n illimité, la quantité δ tend vers *zéro* ainsi que les fractions $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, etc. ; toutes les puissances de $1-\delta$ convergent alors vers 1 et par suite

$$\lim.\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^p = i + \frac{it}{100} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{it}{100}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{it}{100}\right)^3 + \text{etc.}$$

$$\text{limite}\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^p = e^{\frac{it}{100}}$$

Si B est la valeur acquise par 100 frs pendant un nombre d'années représenté par t, on a donc

$$B = 100 \,.\, e^{\frac{it}{100}} \qquad (c)$$

On sait que $e = 2{,}718281828459045235360287\ldots$ Supposons que $t = 3\frac{1}{2}$ et $i = 5$; on aura :

$$\log e = 0{,}43429448$$

$$\frac{it}{100} \log e = (0{,}4342945)\,\tfrac{35}{100} = 0{,}0760015375$$

et

$$\log B = 2{,}0760015 ; \quad \text{d'où} \quad B = 119{,}12\ldots$$

—

DES ANNUITÉS.

591. Un emprunt est souvent effectué à la condition d'être remboursé en un certain nombre d'années par portions égales ; la quotité du remboursement annuel s'appelle *annuité*.

Problème. *Calculer la valeur de l'annuité destinée à éteindre en n années le prêt d'une somme C; le premier payement devant avoir lieu dans un an.*

1re méthode. — La somme C vaudra dans n années, au taux i annuel :

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$$

ou, en représentant par r l'intérêt $\frac{i}{100}$ de 1 fr. en un an,

$$C(1+r)^n$$

Désignons par a la valeur de l'annuité. Le premier versement se faisant un an après le jour de l'emprunt, devra être considéré comme soumis à la capitalisation pendant $n-1$ année; le deuxième agirait de même pendant $n-2$ années, le troisième pendant $n-3$ années, et ainsi de suite; la somme de toutes les annuités composées étant nécessairement égale au capital C composé, on aura

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r)+a=C(1+r)^n$$

ou

$$a\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\ldots+(1+r)+1\right]=C(1+r)^n$$

Sommant, d'après la règle connue, la progression entre crochets, nous obtiendrons

$$a\frac{(1+r)^n-1}{r}=C(1+r)^n\ldots \qquad (d)$$

Cette formule d renferme quatre lettres C, r, n et a; on pourra, connaissant les valeurs de trois d'entr'elles, se proposer de déterminer la quatrième.

1° Si C, r et n sont connus on déduit de (d),

$$a = \frac{Cr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \qquad (1)$$

2° Si r, n et C sont donnés, on aura

$$C = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{\overline{1+r}^n}\right) \qquad (2)$$

3° Lorsque l'on donne C, r et a, on résout la formule (d) par rapport à $\overline{1+r}^n$, et l'on obtient :

$$(a - Cr)\,\overline{1+r}^n = a$$

D'où successivement

$$n \,.\, \log(1+r) + \log(a - Cr) = \log a$$

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)} \qquad (3)$$

Il est à remarquer que n est impossible pour $a < Cr$, puisque les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes ; de plus *n doit être un nombre entier*, car la formule générale d suppose qu'il en est ainsi.

4° Si r est inconnue, la détermination ne peut avoir lieu qu'à l'aide de considérations étrangères à l'arithmétique.

592. 2ᵉ Méthode. La théorie suivante est due à *M. Serres*.

Si S représente la somme des intérêts composés d'une somme α, on a

$$S = \alpha(1+r)^n - \alpha = \alpha\,[\,(1+r)^n - 1\,]$$

Pour abréger, posons

$$(1+r)^n = \gamma$$

Et il s'en suivra :

$$S = \alpha(\gamma - 1)$$

Mais par année α donne un intérêt que nous nommerons a, tel que,

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad S = \frac{a}{r}(\gamma - 1)$$

Cette dernière égalité est une somme de payements annuels augmentés de leurs intérêts composés; si C est le capital primitif correspondant, nous aurons la relation,

$$\frac{a}{r}(\gamma -) = C\gamma, \text{ d'où } a = \frac{Cr\gamma}{\gamma - 1}$$

Et en remplaçant γ par sa valeur $(1 + r)^n$, on retrouve la formule (d).

593. 3ᵉ Méthode. Payer chaque année a frs, en commençant un an après le jour de l'emprunt, revient évidemment à donner au créancier le jour de l'emprunt la somme $\frac{a}{r}$ dont l'intérêt annuel est a, et à stipuler que cette somme sera rendue à la fin de la n^e année.

Or $\frac{a}{r}$, au bout de n années, est devenu $\frac{a}{r}(1 \; r)^n$; d'après les conditions, le créancier n'aura donc reçu à la fin du temps donné, qu'une somme R exprimée par

$$R = \frac{a}{r}(1 + r)^n - \frac{a}{r} = \frac{a}{r}[(1 + r)^n - 1]$$

Mais R n'est autre chose que le capital composé, donc:

$$C(1 + r)^n = \frac{a}{r}[(1 + r)^n - 1]$$

La formule générale des annuités est ainsi retrouvée par *M. Huet*, professeur de mathématiques en France.

594. 4ᵉ Méthode. Une *rente* devient *perpétuelle*, lorsque le capital n'est pas remboursable, et que l'intérêt simple de ce capital doit éternellement être payé, à chaque échéance.

Comme l'annuité est une rente payée pendant un certain nombre n d'années, il est clair que le capital C peut être considéré comme la différence des capitaux relatifs à deux rentes perpétuelles, dont l'une commence au moment de l'emprunt et l'autre après la n^{me} année.

Les capitaux de ces deux rentes sont respectivement

$$\frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \frac{a}{r\,(1+r)^n}$$

donc

$$C = \frac{a}{r} - \frac{a}{r\,(1+r)^n} \quad \text{d'où} \quad Cr\,(1+r)^n = a\,[\,(1+r)^n - 1\,]$$

595. *Annuités pour des périodes de capitalisation moindres qu'une année.* — En déterminant par la formule (3, n° 591) le nombre n d'années pendant lequel une annuité déterminée doit être servie pour éteindre un capital C, il arrive le plus souvent que n est fractionnaire. *A priori* cet état de n est impossible, puisque la théorie des annuités suppose que n est entier.

On a déjà cherché, mais sans succès, à lever cette difficulté; et les essais devaient être infructueux attendu que n *n'étant pas entier*, il est indispensable d'introduire dans le calcul *la considération du taux de capitalisation pour des périodes différentes d'une année.* — En traitant la question sous ce point de vue, nous allons démontrer ce

Théorème. *La formule*

$$\frac{a}{r}\,[\,(1+r)^n - 1\,] = C\,(1+r)^n$$

convient encore au cas de n fractionnaire.

Démonstration. Soit t le temps pendant lequel l'annuité doit être servie, l'unité de t étant l'année; soit α le nombre de périodes annuelles de capitalisation, et p le nombre de

ces périodes contenues dans t; soient enfin μ le taux de capitalisation et β la partie de a qui serait exigible à la fin de chaque période si, d'après le contrat, l'on n'était convenu de verser annuellement.

On aura, en vertu du n° 589,

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{\alpha}=1+\frac{i}{100} \qquad (1)$$

$$\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p}=\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{p}{\alpha}}=\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t} \qquad (2)$$

Et, pour formule du versement périodique β,

$$\beta\left[\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p}-1\right]=\frac{C\mu}{100}\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{p} \qquad (3)$$

D'ailleurs, comme il est évident que a est le *capital composé* d'un versement périodique de quotité β, pendant α périodes pour chacune desquelles $\frac{\mu}{100}$ est l'intérêt de 1 fr., on aura d'après la formule (d, n° 591) :

$$\beta\,\frac{\left(1+\frac{\mu}{100}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\mu}{100}}=a \qquad (4)$$

La combinaison de (1) et (4) donne

$$\beta i = a\mu \qquad (5)$$

En introduisant dans (3) pour β la valeur tirée de cette égalité, et en tenant compte de (2), nous obtenons la relation

$$a \left| \left(1+\frac{i}{100}\right)^t - 1 \right| = \frac{C\,i}{100}\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

qui est bien la formule générale des annuités puisque $\frac{i}{100}$ est l'intérêt annuel de 1 franc. (*c.q.f.d.*)

Ainsi donc dans le calcul du nombre d'années par la formule

$$n = \frac{\log a - \log (a - C\,r)}{\log (1 + r)}$$

la quantité n peut être quelconque, entière ou fractionnaire.

596. Il arrive souvent que les payements périodiques se font trimestriellement ou semestriellement ; il faut alors en désignant par β la quotité de remboursement, faire usage des formules (1) et (5) pour déterminer successivement les quantités μ et β.

L'expression (5) fournit ensuite la valeur de a.

—

TABLES DE MORTALITÉ.

597. La mortalité d'un pays est le rapport entre le nombre des décès et le nombre des habitants d'un pays pendant un temps déterminé.

Une foule de causes agissent sur ce rapport, le modifient sensiblement, et les tables qui représentent la loi de mortalité doivent changer suivant les lieux et les temps ; la mortalité n'est pas non plus la même pour les deux sexes ; mais l'âge est l'élément qui exerce sur la vie l'influence la plus grande : aussi, n'ayant égard qu'à cette seule cause, on

a fait dans chaque pays, des recherches nombreuses permettant de construire *des tables de mortalité, dont le but est de faire connaître combien pour un nombre donné de naissances, il reste de survivants à la fin de chaque année.*

Il y a plusieurs méthodes pour former les tables de mortalité; nous n'indiquerons pour les besoins de ce traité, que la plus simple.

On opère à l'aide des registres de l'état civil, sur un grand nombre d'individus dont la naissance et la mort sont indiquées.

On détermine combien de ces êtres sont morts dans la première année de leur âge, combien dans la deuxième, et ainsi de suite.

On en conclut le nombre de vivants au commencement de chaque année, et l'on inscrit ce nombre dans la table à côté de celui qui indique l'année : toutefois comme dans les deux premières années de la vie, la mortalité est très-rapide, il est bon et utile de procéder par demi-année.

Le quotient de la somme des âges de tous les individus inscrits dans une table de mortalité par le nombre de ces individus est la *durée moyenne*, ou la *vie moyenne* pour cette table : ainsi si l'on considère 1000 enfants nés dans la même année, et qu'on les suive jusqu'à leur extinction complète, la somme de leurs âges aux époques de leurs décès respectifs, divisés par 1000 donne la *vie moyenne;* en d'autres termes la vie moyenne est la *moyenne* arithmétique de la somme de toutes les années de vie des individus de l'âge considéré. C'est *Nicolas Bernouilli* qui a conçu le premier l'idée de la vie moyenne.

Pour un âge donné, on appelle *durée de la vie probable* ou simplement *vie probable*, le nombre d'années après lequel il y a autant de motifs pour qu'un individu de cet âge soit

vivant ou mort ; et il est évident que cela arrive quand le nombre de personnes de l'âge indiqué est réduit à la moitié de ce qu'il était.

On voit qu'il est indispensable de ne pas confondre la *vie probable* et la *vie moyenne*.

.Nous donnons ci-dessous *pour la Belgique*, 1° la table de la vie moyenne aux différents âges; 2° la table de la vie probable; ces deux tables sont dues à *M. Liagre*, Membre de l'Académie de Belgique; 3° la table générale de mortalité pour tous les âges depuis 1 à 100; cette dernière table est due à *M. Quetelet*, secrétaire perpétuel de l'Académie de Bruxelles.

M. — *Table de la vie Moyenne.*

âge	vie moyenne	âge	vie moyenne	âge	vie moyenne	âge	vie moyenne
0	31,41	15	39,49	30	31,62	45	22,94
1	38,41	16	38,92	31	31,04	46	22,32
2	41,80	17	38,33	32	30,45	47	21,70
3	43,32	18	37,76	33	29,87	48	21,07
4	43,98	19	37,25	34	29,28	49	20,44
5	44,25	20	36,75	35	28,68	50	19,80
6	44,15	21	36,31	36	28,09	55	16,67
7	43,83	22	35,87	37	27,49	60	13,62
8	43,45	23	35,44	38	26,89	65	10,91
9	43,05	24	35,01	39	26,28	70	8,49
10	42,54	25	34,48	40	25,70	75	6,49
11	41,93	26	33,93	41	25,14	80	4,90
12	41,34	27	33,36	42	24,59	85	3,89
13	40,70	28	32,78	43	24,04	90	3,19
14	40,06	29	32,20	44	23,49	95	2,29
15	39,49	30	31,62	45	22,94	100	1,25

P. — *Table de la vie probable.*

âge	POPULATION. CROISSANTE — survivants	vie probable	STATIONNAIRE. survivants	vie probable	âge	POPULATION. CROISSANTE — survivants	vie probable	STATIONNAIRE. survivants	vie probable
naissance	1000	40	1000	27	35	534	32	447	30
1 an	850	49	812	40	40	501	28	414	26
2	790	52	738	44	45	464	24	378	23
3	759	52	700	46	50	425	20	342	19
4	739	53	676	46	55	383	17	305	16
5	725	53	659	46	60	340	14	266	13
6	715	53	646	46	65	285	10	219	10
7	706	52	635	46	70	218	8	165	8
8	698	52	626	46	75	147	6	109	5
9	691	51	618	46	80	82	4	59	4
10	685	50	610	45	85	54	3	25	3
15	660	46	581	42	90	11	3	6	3
20	631	42	549	39	95	5	3	1	»
25	595	38	510	36	100	2	»	1	»
30	564	35	478	35	et plus	»	»	»	»

A. — *Table de Mortalité de la Belgique, calculée, d'après les formules rigoureuses sur les documents de l'état civil de 1841 à 1850 et du récensement de 1846.*

âges	survivants	âges	survivants	âges	survivants	âges	survivants
nais-		ans		ans		ans	
sance	10000	26	5974	52	4236	78	986
1an	8497	27	5912	53	4148	79	864
2ans	7882	28	5851	54	4039	80	750
3	7583	29	5791	55	3968	81	647
4	7387	30	5730	56	3872	82	547
5	7253	31	5669	57	3771	83	458
6	7153	32	5608	58	3667	84	382
7	7074	33	5548	59	3562	85	312
8	7003	34	5488	60	3454	86	249
9	6942	35	5427	61	3340	87	197
10	6886	36	5363	62	3221	88	153
11	6832	37	5302	63	3096	89	120
12	6780	38	5239	64	2967	90	92
13	6729	39	5175	65	2837	91	69
14	6678	40	5109	66	2706	92	50
15	6626	41	5040	67	2575	93	36
16	6574	42	4969	68	2443	94	25
17	6521	43	4899	69	2303	95	18
18	6466	44	4829	70	2161	96	13
19	6409	45	4759	71	2012	97	9
20	6350	46	4688	72	1858	98	5
21	6289	47	4617	73	1701	99	3
22	6226	48	4547	74	1545	100	1,6
23	6162	49	4476	75	1394		
24	6099	50	4401	76	1250		
25	6036	51	4321	77	1115		

On a le tort de mettre dans les mains de la jeunesse les tables de mortalité, de *Duvillard* ou de *Deparcieux;* ces tables, calculées dans le commencement du siècle, s'éloignent souvent beaucoup des conditions de la vie en France et en Belgique. M. Quetelet s'est livré, dans notre pays à une étude approfondie de la loi de mortalité; on lui doit des travaux remarquables servant de base à de vastes opérations financières de l'Etat; ses tables, calculées avec le plus grand soin, sont contrôlées à chaque récensement officiel de population. *M. Quetelet* a aussi construit des tables, tant pour les villes que pour les campagnes de la Belgique, donnant la loi de mortalité pour les hommes et pour les femmes. (Voir Bulletin de la commission centrale de statistique belge. — Tome V.)

Quant à la France ce sont les tables de *M. Demonferrand* auxquelles on doit recourir; en Angleterre c'est à celles de *M. de Morgan;* toutes ces tables tiennent compte de la différence des sexes, des villes et des campagnes.

—

RENTES VIAGÈRES.

598. Les probabilités de la vie humaine, combinées avec l'accroissement des fonds placés à intérêt composé, ont donné lieu aux *rentes viagères*, aux *tontines*, aux *caisses d'épargnes*, ainsi qu'à une foule de spéculations dont le but est de procurer pour l'avenir des avantages dont l'importance dépend des chances de mortalité.

Les rentes viagères sont de deux espèces, *sur* UNE *ou sur* PLUSIEURS *têtes*.

RENTE VIAGÈRE SUR UNE TÊTE. — Enoncé général. — *Une personne d'un âge a donne à un banquier un capital* C, *à condition qu'une somme* R *lui sera payée annuellement, et jusqu'à sa mort, à l'intérêt* i %. *Quelle est la relation qui doit exister entre* C *et* i?

Il est clair que ce problème n'est qu'une question d'annuité pour lequel il faut déterminer le nombre n d'années pendant lequel il est *probable* que la rente devra être servie ; après que ce nombre n aura été déterminé, il restera à calculer R au moyen de la formule (1, n° 591) :

$$R = \frac{C\frac{i}{100}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}}$$

Telle est la relation demandée, dont les tables (A) et (P) fournissent la vie probable pour l'âge quelconque a.

Exemple. Soient $C = 50000$, $i = 5$, $a = 40$. Les tables de mortalité apprennent qu'une personne âgée de 40 ans a l'espérance de vivre encore $27\frac{1}{2}$ ans ; on aura ainsi $n = 27\frac{1}{2}$, et

$$R = \frac{2500}{1-\frac{1}{(1,05)^{\frac{55}{2}}}}$$

Par logarithmes, on a

$$\log (1,05)^{\frac{55}{2}} = \tfrac{55}{2} . \log 1,05 = \tfrac{55}{2} . 0,2118930 = 0,58270575$$

$$(1,05)^{\frac{55}{2}} = 3,825635982...$$

D'où

$$R = \frac{2500 \,.\, 3,8256}{2,8256}$$

$$\log 2500 = 3,3979400$$
$$\log 3,8256... = 0,5827057$$
$$-\log 2,8256... = \overline{1},5488811$$

$$\log R = 3,5295268$$
$$R = 3384,7515625 \text{ frs.}$$

599. RENTES VIAGÈRES SUR PLUSIEURS TÊTES. Enoncé général. — *Plusieurs personnes d'âges* a, a', a''... *donnent à un banquier un capital* C, *à condition qu'une somme* R *sera payée annuellement à l'intérêt* i °/₀, *aussi longtemps que quelqu'une de ces personnes sera encore vivante. Déterminer la valeur de* R, *dont on dit alors qu'il y a réversibilité sur les survivants.*

Soient v, v', v'', v'''... les vies probables respectives des âges a, a', a'', a'''...; si v_p est la plus petite de ces vies probables, en l'ajoutant à chacun des autres âges, il est à supposer que les associés correspondants pourront atteindre les âges

$$a + v_p,\ a' + v_p,\ a'' + v_p,\ a''' + v_p \dots$$

Recourant à la table de mortalité, on trouvera que

$$v_1,\ v_1',\ v_1'',\ v_1''',\dots$$

sont les vies probables correspondantes à ces âges; v_q étant la plus petite de ces vies, on doit admettre que, à l'exception de l'assuré dont v_q est l'espérance de vivre, les autres associés parviendront aux âges

$$a + v_p + v_q,\ a' + v_p + v_q,\ a'' + v_p + v_q,\ a''' + v_p + v_q,\dots$$

On continuera ainsi et, par une suite d'extinctions probables et complètes, on obtiendra

$$n = v_p + v_q + v_r + \dots$$

Telle est la quantité n à introduire dans la formule générale des annuités.

Exemple. Soient C=100000, i=5, a=24, a'=30, a''=40, a'''=44.

Ages.				Vies probables.				
	$+v_p$	$+v_q$	$+v_r$	v	v_1	v_2	v_3	n
a=24	48	59	69	39	22	14	8	$8=v_s$
a'=30	54	65		35	17	10		$10=v_r$
a''=40	64			28	11			$11=v_q$
a'''=44				24				$24=v_p$

Ce tableau donne pour 24, 30, 40 et 44 les vies probables 39, 35, 28, 24, dont la plus petite 24 est ajoutée aux trois premiers âges pour donner 48, 54, 64; les nouvelles vies probables sont alors 22, 17, 11 et l'on ajoute 11 aux âges 48 et 54, ce qui conduit à 59 et à 65; la plus petite 10 des vies probables correspondantes est ajoutée à 59 pour avoir 69, dont le nombre probable d'années de vie est 8.

Il résulte de là que $n = 8+10+11+24 = 53$, et par suite

$$R = \frac{3000.(1,05)^{53}}{(1,05)^{53} - 1}$$

$$\log 1,05 = 0,02118930$$

$$53 \log 1,05 = 1,1230329, \textit{ et } (1,05)^{53} = 13,273$$

Donc

$$\log 5000 = 3,6989700$$

$$\log (1,05)^{53} = 1,1230329$$

$$-\log 12,273 = \bar{2},9119885$$

$$\log R = 3,7339914, \quad \textit{d'où } R = 5419,90$$

100. Les assurances sur la vie prennent en général le nom de *tontines*, et sont de deux espèces : dans la *première*, un certain nombre d'individus du même âge sont supposés verser ensemble une certaine somme C, qui au bout de n années doit être partagée entre les survivants proportionnellement à leurs mises ; dans la *seconde espèce de tontine*, les survivants héritent encore des morts, mais deviennent *rentiers*, c'est-à-dire qu'on leur sert chaque année une rente qui s'accroît au fur et à mesure des extinctions.

Les *caisses d'épargne*, *de prévoyance*, *de secours*, *de retraite*, etc., ne diffèrent pas beaucoup des rentes viagères sur une seule tête ; la *caisse des veuves* a beaucoup d'analogie avec les rentes viagères sur deux têtes, avec réversibilité.

EXERCICES.

1. Convertir $23^{\circ}31'47''$ en grades et parties de grades.

2. L'aune d'un drap se vend $36^{l}\ 17^{s}\ 6^{d}$; quel est le prix du mètre sachant que 80 frs valent 81 livres tournois et que une aune de France est égale à $1^{m},191077$?

3. La livre (poids de marc) d'une certaine marchandise coûtant $25^{l}\ 11^{s}\ 9^{d}$, on demande le prix en francs de $375^{kilog.}175$.

On sait que 1 kilogramme est égal à $2^{l},04287652$.

4. On suppose que 0,45 de rasière de blé produisent $57^{litres},6$ de farine, et que 17,1 mesurettes de farine fournissent $615^{gros},6$ de pain ; combien aura-t-on de livres de pain avec 71,5 boisseaux de b'é proposé ? On sait que 1 rasière = 100 litres ; 1 boisseau = 10 litres et 1 mesurette = 0,1 litre

5. On veut partager la somme de 1824 frs entre trois personnes, de manière que $\frac{7}{9}$ et $\frac{3}{4}$ soient les rapports respectifs de la part de la première aux parts des deux autres personnes?

6. Six ouvriers en travaillant ensemble ont fait un ouvrage en 4 jours : les rapports entre les forces des cinq derniers, comparativement à la force du premier, sont $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$. Quel serait le temps nécessaire à chaque ouvrier pour faire tout l'ouvrage ?

7. Six ouvriers travaillent ensemble; les forces des premier, deuxième, troisième sont comme 2, 3 et 4, celles des quatrième et cinquième comme $1\frac{1}{3}$ et $2\frac{2}{3}$; enfin celles du deuxième et du sixième répondent à 4 et 3.

Ils ont été payés d'après leur force, et si chacun eut reçu autant que le troisième, ils auraient reçu entr'eux 315 frs de plus. Combien chacun a-t-il reçu?

8. Le rapport de deux nombres demandés est $\frac{1}{4}$, et l'on sait qu'en ajoutant simultanément 3 aux deux nombres, le rapport est $\frac{1}{3}$?

9. Un particulier a placé une certaine somme pour *huit* ans, à raison de 8 p % par an; au bout de trois ans, celui à qui il l'a prêtée lui paye les intérêts échus, et offre de lui faire le remboursement du capital, en lui tenant compte de la moitié des intérêts qu'il aurait dû lui payer, s'il avait conservé la somme jusqu'à l'époque convenue. Après acceptation, ce particulier reçoit 14400 frs. A quel taux avait-il placé ?

10. Un négociant, qui veut se retirer du commerce, réalise sa fortune et fait trois portions de ses fonds.—Avec la première il achète une maison qui lui rapporte annuellement $4\frac{1}{2}$ p. %, et ce produit est le centième de la somme réalisée. Il place la deuxième portion en viager, à 9 p. %. Enfin il retire de la

troisième, qui est aussi forte que les deux autres, une somme de 10000 frs; il met le reste chez un banquier qui lui en fait une rente de 5400 frs à raison de 6 p.%. — Combien ce négociant a-t-il réalisé; quel est le prix de la maison, quelles sont les sommes mises chez le banquier et en viager ; enfin quel est le revenu total?

11. Dans une traversée, un capitaine se trouve forcé, par le mauvais temps, de jeter à la mer les $\frac{2}{5}$ de sa cargaison. Arrivé à destination, il vend $\frac{1}{3}$ du reste à 20 p % de bénéfice, et $\frac{1}{4}$ à 50 p. %. Plus tard cette marchandise devenant très-rare, il vend la portion qui lui reste à un prix tel, que le gain qu'il fait, tant sur cette dernière vente que sur les deux précédentes, lui donne un bénéfice net de 1 p.% sur le chargement total, bien que les frais de chargement, d'équipage et autres, aient absorbé $\frac{1}{5}$ de la vente générale.

On demande combien il a gagné p.% sur son dernier marché?

12. Un particulier a un billet de 9681,57 frs à recevoir, à 9 mois 17 jours d'échéance; mais ayant besoin d'argent, il en demande le payement immédiat, et on le lui escompte à 6 p.% et en dehors.

Régler aussi l'escompte *en dedans* et au même taux.

13. Un billet de 11891,42 frs, payable dans 3 ans et 5 mois, a été escompté en dehors pour 9000 frs. Quel est le taux d'escompte?

14. La cargaison d'un navire est estimée 1500000 francs; pendant le voyage, il y a eu 25000 frs d'avarie. — On demande combien doit payer pour sa part des avaries un négociant qui a fait assurer pour 50000 frs de marchandises, et qui s'est engagé à rembourser aux assureurs $7\frac{1}{2}$ p.% du montant des avaries?

15. Cinq commerçants se sont associés à diverses époques: le premier a fourni 25000 frs pendant 1 an; le deuxième

48000 frs pendant 15 mois; le troisième 64000 frs pendant 9 mois ; le quatrième 35000 pendant 8 mois ; enfin le dernier 42000 frs qui ne sont restés que 7 mois en société. — Répartir 164000 frs de dividende total.

16. Quatre associés partagent entr'eux un dividende de 20000 frs, acquis par une opération de 18 mois dans laquelle leurs fonds sont restés respectivement 18, 14, 11 et 5 mois ; la répartition assigne pour dividendes partiels correspondants 9000, 5000, 4000 et 2000 frs. — Quelles avaient été les mises ?

17. Deux amis mettent en commun un capital social de 1000 frs. Le premier laisse son argent pendant 3 mois, l'autre pendant 2 mois dans la société ; chacun retire 990 frs de capital et d'intérêt. Déterminer les mises de chacun.

18. On veut emplir une pièce de 450 litres avec du vin à 0,75 fr. le litre Combien devra-t on prendre d'eau et de vin pour que le mélange revienne à 0,60 fr. le litre?

19. Les caractères d'imprimerie sont composés de 5 parties de cuivre, de 20 d'antimoine et de 80 de plomb ; on demande ce que vaut 1 kilogramme de cet alliage, en supposant le cuivre à 2,50 frs, l'antimoine à 1,50 fr. et le plomb à 0,55 fr. le kilogramme.

20. Un distillateur propose de mélanger de l'eau-de-vie à 1,20 fr. avec de l'eau-de-vie à 0.45 fr., de manière qu'en vendant 1,35 fr. chaque mesure de mélange, il gagne 30 p. $^0_0$. Quelles doivent-être les proportions du mélange.

21. Un marchand a deux espèces de thé; la première lui revient à 14 frs, et l'autre à 18 frs le kilog ; il fournit une caisse de 100 kilog et reçoit pour son payement 1932 frs. Combien y avait-il de thé de chaque espèce, sachant que le marchand gagne 15 p. $^0_0$.

22. Dans quel rapport faut-il mêler du vin à 1,25 fr et

à 0,95 fr la bouteille pour former un mélange qui revienne à 1,05 fr.

23. Un orfèvre a deux lingots, qui contiennent de l'or et de l'argent : le premier sur 100 grammes, en contient 95 d'or et 5 d'argent; le second sur 100 grammes en contient 85 d'or et 15 d'argent. Il désire faire un troisième lingot qui contienne sur 100 grammes, 90 grammes d'or et 10 d'argent.

24. On a quatre lingots contenant respectivement 12, 8, 10, 15 grammes d'or et 8, 4, 6, 5 d'argent. Ayant pris 5 grammes du premier, 6 du second, 8 du troisième et 4 du quatrième, on veut savoir combien on a pris d'or en tout.

25. Un vase contient un mélange d'eau et de vin. On en retire le quart,et on le remplace par de l'eau; on retire ensuite le quart du nouveau mélange et on le remplace encore par de l'eau; on fait une troisième fois une semblable opération, et il arrive que le vase contient 3 fois autant d'eau que de vin. Quel était le rapport primitif des quantités d'eau et de vin.

26. D'un capital de 60000 frs on a placé une partie à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ et une autre à $3\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$; sachant que le revenu total est de 2500 frs, on demande quelle est la valeur des sommes placées.

27. Un affineur a 35 kilogrammes d'or pur, il veut en faire de l'or au titre de 950 millièmes ; on demande combien il doit ajouter d'argent à son métal.

28. On veut fondre ensemble un certain nombre de grammes d'or et d'argent, dont 5 au titre de 950 millièmes, 25 à celui de 900 millièmes, 30 à celui de 800 millièmes, et enfin 40 à celui de 750 millièmes : on demande quel sera le titre du gramme du mélange?

29. Un orfèvre ayant 5 kilogrammes d'or au titre de 900 millièmes, 25 kilog au titre de 850 millièmes, 70 à 750 millièmes, on demande combien il doit ajouter de métal pur à la fonte de ces 100 kilogrammes pour élever le titre de cette fonte à celui de 950 millièmes?

30. Dans quelle proportion faut-il allier de l'argent au titre de 0,927 et de l'argent au titre de 0,865 pour avoir un lingot au titre de 0,870.

31. Quel était le taux annuel d'une somme de 10000 qui en 10^{ans} 5^{m} $3^{sem.}$ était devenue par capitalisation d'intérêt, 16341 frs.

32. Quel serait après 16 ans 5 mois le capital composé de 50000 frs à $4\frac{3}{4}$ p. $\frac{0}{0}$.

33. Le taux annuel étant à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ combien devra-t-on donner immédiatement pour toucher 15000 dans 7 ans 8 mois.

34. Le taux étant à $7\frac{1}{5}$ p. $\frac{0}{0}$, combien de temps faut-il pour que le capital de 1648,27 frs soit devenu par capitalisation 7341,59.

35. On a prêté à quelqu'un une somme de 3804 frs, à cette condition que, s'il se libère à la fin de la première année il ne payera aucun intérêt, mais que, pour chaque année de retard qu'il apportera dans le payement, il payera, savoir : pour la première 5 p. $\frac{0}{0}$, pour la deuxième 10, pour la troisième 20, pour la quatrième 25. Il arrive qu'il s'est acquitté en 5 payements égaux, effectués à la fin de chaque année. Quel est le montant de chaque remboursement.

36. Trois frères mettent dans un même commerce une même somme : le premier renouvelle ses fonds tous les 3 mois et gagne $6\frac{2}{5}$ p. $\frac{0}{0}$, le deuxième les renouvelle tous les 4 mois et gagne 10 p. $\frac{0}{0}$, le troisième renouvelle tous les 6 mois et gagne 15 p. $\frac{0}{0}$. Après un an, le deuxième a gagné

408 frs de plus que le troisième. On demande quelle est la mise uniforme et le bénéfice de chacun.

37. Quelqu'un a emprunté 21000 frs pour un terme de 15 ans, avec faculté de s'acquitter partiellement aux époques qui seront le plus à sa convenance, et au taux annuel de $6\frac{1}{4}$ p. $\frac{0}{0}$.

Sachant qu'après un an il a payé 4000 frs, après deux ans 3000, après 6 ans 5000, après 10 ans 800, on demande combien il a dû payer après cette dernière époque pour se libérer du restant en 5 payements égaux, effectués à la fin de chaque année.

38. Quel capital faut-il donner actuellement pour se faire une rente de 10000 frs pendant 20 ans à $5\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$, comprenant le remboursement du capital fourni par le rentier et de l'intérêt composé.

39. Un propriétaire fait arracher des bois et les remplace par des vignes : on suppose 1° que chaque *are* de bois lui donne 400 frs de revenu annuel, et qu'il coute 350 frs par are pour exécuter le changement; 2° qu'une are de vigne nécessite 50 frs de façon par an, et qu'elle ne produit rien pendant les trois premières années, mais qu'elle donne 325 frs à la 4e année, 500 frs à la 5e, 600 à toutes les suivantes; 3° que l'argent est à 10 p. $\frac{0}{0}$ avec capitalisation. L'opération est-elle avantageuse?

40. Quelle est l'annuité qui peut amortir, au bout de 17 ans une dette de 13578, le taux d'intérêt annuel étant $5\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$.

41. Pendant combien d'années doit-on payer l'annuité de 1148 frs pour amortir une dette de 15000 frs, au taux annuel de $4\frac{1}{3}$ p. $\frac{0}{0}$.

42. Un célibataire de 61 ans désire connaître quelle est

la rente viagère que sa fortune de 35000 frs peut lui procurer; le taux est à 10 p. $\frac{0}{0}$.

43. Deux époux, sans enfants, placent à fonds perdu, un capital de 42600 à 8 p. $\frac{0}{0}$, et à condition de réversibilité; le mari ayant 56 ans et l'épouse 50, on demande à quelle rente viagère ils ont droit.

44. Vingt personnes, âgées de 35 ans ont formé une *tontine*, en donnant chacune 4000 frs à 5 p. $\frac{0}{0}$: dans 20 ans les survivants se partageront la somme totale avec les intérêts accumulés, et l'on demande la part probable de chaque survivant.

FIN.

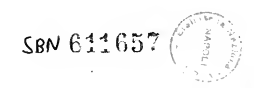


TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE QUATRIÈME.

—

THÉORIE GÉNÉRALE DES FRACTIONS.

LIVRE CINQUIÈME.

—

LIVRE SIXIÈME.

SYSTÈMES DE NUMÉRATION A BASE QUELCONQUE.

LIVRE SEPTIÈME.

THÉORIE GÉNÉRALE DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

LIVRE HUITIÈME.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

LIVRE NEUVIÈME.

—

MESURES ET APPLICATIONS GÉNÉRALES.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

1. Septembre 1861.

Pages.	Lignes.	Lisez	au lieu de
12	11	quatre-vingts	quatre-vingt.
»	19	sept cent	sept cents
»	20	six cent	six cents
46	17	903	913
»	19	903	913
42	2	10 000	1000
56	31	abcd > AB. D	abcd < AB. D
61	31	c. q. f. d.	c. a. b. d.
97	16	$R_{n+2} - R_{n+1} > R_{n+1}$	$R_{n+2} - R_{n+?} > R_{n+1}$
104	14	n	N
119	26	=1	=7
126	30	diviser	multiplier
134	21	*augmente ou diminue de*	*augmente de*
140	6	soit diviseur de *q*.	soient des diviseurs de *q*.
252	21,22	rapport $\frac{P}{na}$	rapport commensurable $\frac{P}{na}$
234	19	$(p+1)\,y' < B'$	$(p+1)\,y' > B'$
240	29	périodique	période
»	»	lorsque	lorsqu'elle
241	1	la période commence	commence
243	12	le	ce
250	3	$A\,\frac{10^m - 1}{B}$	$\frac{10-1}{B}$
»	6	$\frac{A}{B}$	B
279	7	trouver, et qui peut être irrationnelle	trouver
»	10	chiffres entiers	chiffres
»	15	chiffres entiers	chiffres
»	22	$\frac{b^2}{2a.10^n}$	$\frac{b^2}{a.10^n}$
280	2	*est égale à la portion entière encore inconnue de la racine, ou la surpasse d'une unité.*	*est égale à la portion encore inconnue de la racine.*
»	10	*obtenue, avec exactitude ou à moins d'une unité près par excès.*	*obtenue.*
306	7	$\left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)^2$	$\frac{10^n - 1}{10^n}$
»	19	*obtenue avec exactitude à moins d'une unité près par excès.*	*obtenue.*
357	7	$\alpha^m + \rho$	$\alpha^m - \rho$
392	5	$\left(\frac{17}{39}\right)^7$	$\left(\frac{15}{39}\right)$
395	8	95,892	95892

